Zadání 4. série

Termín odeslání: 21. prosince 2012

Adresa pro odeslání: *Korespondenční seminář iKS*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Czech republic

Úloha C4. Slovem délky n rozumíme uspořádanou n-tici písmen a, b, c. Označme x_n počet všech slov délky n, která neobsahují jako podslovo aa ani bb. Označme y_n počet všech slov délky n takových, že v každé trojici po sobě jdoucích písmen některé z písmen a, b nebo c chybí. Ukažte, že $y_{n+1} = 3x_n$.

Úloha A4. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b takových, že neexistuje nekonečná posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující rekurentní vztah $x_{n+1} = \frac{2x_n - 1}{1 - x_n}$, jejíž první člen je $\frac{F_a}{F_b}$, kde F_k značí k-té Fibonacciho číslo.

Úloha N4. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel p takových, že pro každé z nich existuje přirozené číslo n_p, které nedělí $p - 1$, a přitom $n_p! + 1$ je dělitelné p.

Úloha G4. Uvnitř trojúhelníku ABC zvolme bod P. Označme průsečíky polopřímek AP, BP, CP s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC postupně A_1, B_1, C_1. Dále označme A_2, B_2, C_2 obrazy bodů A_1, B_1, C_1 ve středových souměrnostech daných postupně středy stran BC, CA, AB. Dokažte, že ortocentrum trojúhelníku ABC a body A_2, B_2, C_2 leží na jedné kružnici.