Zadanie 6. série

Termín odoslania: 20.1.2025

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Email na otázky: `info@iksko.org`

Úloha A6. Trojicu (a, b, c) kladných čísel nazvime záhadnou, ak

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2c^2} + 2ab} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2a^2} + 2bc} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2b^2} + 2ca} = 2(a + b + c).$$

Dokážte, že ak je trojica (a, b, c) záhadná, potom je záhadná aj trojica (c, b, a).

Úloha N6. Dané je kladné celé číslo $k \geq 2$, nech $a_1 = 1$ a pre každé celé číslo $n \geq 2$ nech a_n je najmenšie riešenie rovnice

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{x}{a_i}} \right\rfloor$$

väčšie ako a_{n-1}. Dokážte, že všetky prvočísla sa nachádzajú v postupnosti $a_1, a_2, \ldots$.

Úloha C6. Daný je graf $G = (V, E)$, kde $|V| = n > 1$. Pre každú hranu $e \in E$ nech $c(e)$ je počet vrcholov najväčšieho úplného podgrafu, ktorý obsahuje e. Dokážte, že platí

$$\sum_{e \in E} \frac{c(e)}{c(e) - 1} \leq \frac{n^2}{2}.$$

Úloha G6. Kopy sa snaží robiť geometriu, ale nemá pravítko ani kružidlo. Namiesto toho má Kopy zariadenie, ktoré pri zadaní štyroch rôznych bodov A, B, C, P v rovine označí kamaráta bodu P vzhľadom na trojuholník ABC, ak existuje. Ukážte, že ak sú v rovine označené dva body, potom Kopy dokáže zostrojiť ich stred pomocou tohto zariadenia a ceruzky na označenie ďalších bodov a žiadnych iných nástrojov.

(Pripomeňme si, že kamarát bodu P vzhľadom na trojuholník ABC je bod Q taký, že priamky AP a AQ sú osovo súmerné podľa osi uhla BAC, priamky BP a BQ sú osovo súmerné podľa osi uhla CBA, priamky CP a CQ sú osovo súmerné podľa osi uhla ACB. O bodoch označených ceruzkou môžete predpokladať, že neležia na žiadnej priamke prechádzajúcej dvoma vyznačenými bodmi ani na žiadnej kružnici prechádzajúcej tromi vyznačenými bodmi.)