Zadání 5. série

Termín odeslání: 20. prosinec 2021

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha A5. Dokažte, že pro libovolná kladná celá čísla m, n platí

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$$

Úloha G5. V rovině leží dva pravidelné (ne nutně shodné) $2n$-úhelníky, jejichž průnikem je $4n$-úhelník $P_1P_2 \ldots P_{4n}$. Dokažte, že uvážíme-li každou druhou jeho úhlopříčku, tedy

$$P_1P_{2n+1}, \quad P_3P_{2n+3}, \quad \ldots, \quad P_{2n-1}P_{4n-1},$$

pak všech n těchto úhlopříček prochází jedním bodem.

Úloha N5. Najděte všechny dvojice kladných celých čísel x, y, pro něž je

$$(x + y)(xy + 1)$$

mocninou dvojky.

Úloha C5. Každý správný org iKSka nosí tradiční iKSkový klobouk, který je buď zelený, oranžový nebo fialový. O skupince orgů řekneme, že je *vyvážená*, pokud jsou na jejich hlavách zastoupeny všechny tři barvy klobouků rovným počtem. Na výběrovce úloh páté série se sešlo $3n$ orgů, přičemž n jich přišlo v zeleném, n v oranžovém a n ve fialovém klobouku. Rozesadili se kolem kulatého stolu, přičemž se shodou okolností přihodilo, že počet (neuspořádaných) dvojic orgů, kteří sedí vedle sebe a na hlavách mají klobouky různé barvy, byl sudý. Dokažte, že šlo rozříznout stůl jedním rovným řezem na dva kusy tak, aby u každého kusu zbyly vyvážené skupinky orgů.