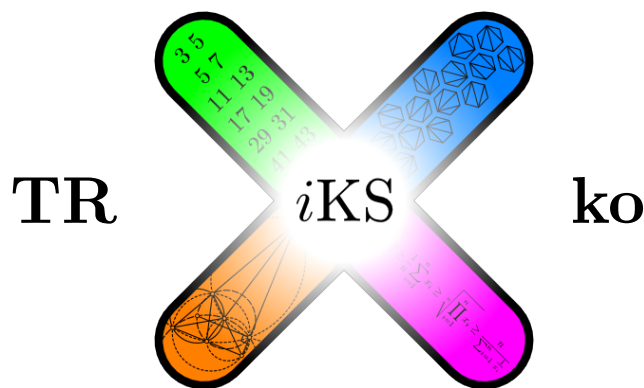




Úloha 1. Najděte všechna prvočísla p, q, r ¹ taková, že $pqr = 101(p + q + r)$, nebo $p + q + r = 101pqr$.

Řešení. Nejprve BÚNO uvažujme, že r je největší, tak $p+q+r \leq 3r$, ale $pqr \geq 4r$, takže $pqr > p + r + q$, proto $pqr = 101(p + r + q)$.

Číslo 101 je prvočíslo, proto BÚNO $r = 101$, pak $pq = p+q+101$ a $(p-1)(q-1) = 102 = 1 \cdot 102 = 2 \cdot 51 = 3 \cdot 34 = 6 \cdot 17$, takže p a q jsou 2 a 103, proto $\{p, q, r\} = \{2, 101, 103\}$. □

Úloha 2. Na tabuli jsou napsána čísla 19 a 98. Každou minutu se každé z čísel, nezávisle na druhém, buď zvětší o 1, nebo se vynásobí sebou samým. Mohou být na tabuli někdy stejná čísla?

Řešení. Před tím, než by čísla na tabuli byla poprvé shodná, bychom museli jedno číslo umocnit a ke druhému přičíst 1. Předchozí minutu se tedy jednalo o čísla t a $t^2 - 1$.

Zřejmě platí, že každou minutu se obě čísla zvětší alespoň o jedna. Kdybychom se k číslu $t^2 - 1$ dostali pouhým přičítáním čísla 1 a to k -krát, čísla na začátku by měla být $t^2 - 1 - k$ a $x \leq t - k$. Jelikož je první číslo větší, jednalo by se o čísla 98 a 19 v tomto pořadí, ale pak $t^2 = 99 + k$ a $x \leq \sqrt{99 + k} - k \leq \sqrt{99} < 19$, což je spor.

Proto musel být jeden z kroků, než jsme se dostali k číslu $t^2 - 1$, násobení samo sebou a řekněme, že po posledním z nich jsme dostali číslo k^2 . Abychom se nyní dostali k číslu $t^2 - 1$, museli jsme alespoň $(2t - 2)$ -krát přičíst jedničku (nejbližší menší druhá mocnina), což ale znamená, že předtím bylo první z čísel maximálně $t - (2t - 2) < 19$ a to je spor, protože čísla v každém kroku rostou alespoň o jedna. Proto nikdy na tabuli nemohou být napsána stejná čísla. □

Úloha 3. Je dána kružnice k a její 2 průměry AB a CD . Zvolíme bod P na k , pak X a Y budou postupně paty kolmic z P na AB a CD . Ukažte, že délka $|XY|$ je nezávislá na volbě bodu P .

Řešení. S je střed k . Pak P, X, Y, S jsou body ležící na kružnici l s průměrem PS , což je poloměr k . úhel $\angle|XSY| = \angle|BSD|$. Obvodový úhel, ani poloměr kružnice l nezávisí na volbě P , takže délka $|XY|$ taky nezávisí na volbě P . □

¹neboli neuspořádané trojice $\{p, q, r\}$

Úloha 4. *Lze najít čtyři přirozená čísla taková, že když přičteme součin jakýchkoliv dvou z nich k 2006, dostaneme čtverec?*

Řešení. Uvažujme, že taková čísla jsou, podívejme se na problém ve světě modulo 4. Každý čtverec je buď 1, nebo 0, ale 2006 je 2. Všechny součiny nalezených čísel musí tedy být 2, nebo 3. Součin dvou sudých čísel v tomto světě je 0, takže alespoň 3 z nich musí být lichá. Liché číslo v tomto světě je buď 1, nebo 3, takže jsou tu alespoň 2 stejná, ale jejich součin je 1. Vidíme tedy, že nejsme schopni nalézt taková 4 čísla. $\square$

Úloha 5. *m je přirozené číslo takové, že $m \equiv 2 \pmod{4}$. Ukažte, že existuje nejvýše jeden rozklad $m = ab$, kde a, b jsou přirozená čísla splňující:*
 $0 < a - b < \sqrt{5 + 4\sqrt{4m + 1}}$

Řešení. Umocněním, upravením a odmocněním druhé nerovnosti: $a + b < \sqrt{4m + 1} + 2$ z AG-nerovnosti navíc: $a + b \geq 2\sqrt{ab} = \sqrt{4m}$. S využitím kongruence ze zadání vidíme, že a a b mají různou paritu a $4m$ není čtverec, takže můžeme nerovnosti přepsat na: $\sqrt{4m + 1} \leq a + b < \sqrt{4m + 1} + 2$.

Výraz $a+b$ tedy může nabývat 2 po sobě jdoucích hodnot, s využitím zmíněné parity víme, že $a + b$ je liché, takže ho máme pevně. známe ab i $a + b$ a víme, že $a < b$, proto existuje nejvýše jeden rozklad m . $\square$