

Zadání 3. série

Termín odeslání: 25. září

Adresa: Korespondenční seminář iKS
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Czech republic

Úloha G3. Budiž dán trojúhelník ABC , kde $|AB| \neq |BC|$, s kružnicí opsanou k . Osa vnitřního úhlu $\sphericalangle ABC$ protne stranu AC v bodě D . Dále ať M je středem oblouku kružnice k vymezeného body A, C , který obsahuje bod B . Kružnice opsaná trojúhelníku BDM protíná přímkou AB podruhé v bodě J . Označme dále K obraz bodu A ve středové souměrnosti podle J . Konečně ať L je průsečík přímek AM a DK . Dokažte, že body K, L, M, B leží na jedné kružnici.

Úloha C3. iKSkó řeší stálých $2n$ studentů, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Přitom každý rok právě n z nich jede na IMO. Bylo by pěkné, kdyby spolu každý dva řešitelé byli alespoň na jednom. Kolik let nejméně je potřeba, aby se jim to mohlo podařit?

Úloha A3. Mějme n přirozené. Na černé nástěnné křídové tabuli jsou napsaná po dvou různá nenulová reálná čísla x_i pro i od 1 do n . Navíc, na bílé magnetické tabuli se stojanem jsou napsaná čísla $x_i + \frac{(-1)^i}{x_i}$ pro i od 1 do n . Rozhodněte, pro která n mohou být na obou tabulích stejná čísla.

Úloha N3. Najděte všechna přirozené čísla n taková, že pro libovolné přirozené k existuje přirozené a splňující $n \mid a^3 + a - k$.