Zadanie 6. série

Termín odoslania: 22. január 2024
Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`
Email na otázky: `info@iksko.org`

Úloha G6. Daný je trojuholník ABC. Nech M a N sú postupne stredy strán AC a AB. Priamky BM a CN pretínajú kružnicu opísanú trojuholníku ABC druhýkrát v bodoch M' a N'. Nech body X,Y ležia postupne na polpriamkach opačných k polpriamkam BC a CB tak, že $|\measuredangle N'XB| = |\measuredangle ACN|$ a $|\measuredangle M'YC| = |\measuredangle ABM|$. Dokážte, že trojuholník AXY je rovnoramenný.

Úloha A6. Rovnica $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ má tri reálne korene $x_1 < x_2 < x_3$. Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla n platí, že 3 delí $\lceil x_3^n \rceil$. ($\lceil y \rceil$ je značenie pre hornú celú časť čísla y, čo je najmenšie celé číslo väčšie alebo rovné ako y)

Úloha N6. Šošo zobral svoje obľúbené kladné celé číslo $a_1 > 2$ a následne skonštruoval nekonečnú postupnosť predpisom

$$a_{n+1} = a_n^n - 1.$$

Nech pre kladné celé číslo $m > 1$ značí $p(m)$ najmenšieho prvočíselného deliteľa m. Určite všetky kladné celé čísla $a_1 > 2$, pre ktoré bola postupnosť $p(a_n)$ ohraničená.

Úloha C6. Určte všetky kladné celé čísla n, pre ktoré vieme ofarbiť štvorčeky nekonečnej štvorčekovej siete tak, že v každom obdĺžniku, ktorý obsahuje n políčok, je nepárny počet ofarbených políčok.