Řešení 1. série

Úloha A1. *Dokažte, že pro každé přirozené n existuje souvislý úsek přirozených čísel menších nebo rovných n délky alespoň $\frac{n}{20}$ takový, že v tomto úseku neleží žádný člen žádné posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ splňující $a_1 = 3$, $a_2 = 4$ a pro každé $n \geq 2$ buď $a_{n+1} = 2a_n$, a nebo $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$.*

Řešení. Najprv sa pozrime ak by sme mali postupnosť danú $b_1 = 3$ a $b_2 = 4$ a rekurentným vzťahom $b_{n+1} = 3b_n - 2b_{n-1}$. Jednoduchou indukciou sa ukáže, že $b_n = 2 + 2^{n-1}$.

Teraz si všimnime, že ak pre nejaký index k platí, že $a_{k+1} = 2a_k$ tak potom platí, že $3a_{k+1} - 2a_k = 3a_{k+1} - a_{k+1} = 2a_{k+1}$, čiže je jedno ktorý z rekurentných vzťahov si v následnom kroku vyberieme oba budú viesť na to že $a_{k+2} = 2a_{k+1}$ a teda jednoducho induktívne potom platí, že $a_{k+i} = 2^i a_k$, kde i je kladné celé číslo. Teda nech $m \geq 2$ je prvý index, kde $a_{m+1} = 2a_m$. Z prvého odseku vieme, že $a_m = 2 + 2^{m-1}$ a následne pre z druhého odseku si vieme, že $a_{m+i} = 2^{i+1} + 2^{i+m-1}$.

Všimnime si teda, že v postupnosti číslo a_i bude mať teda vždy tvar a bude sa rovnať $2^l + 2^{i-1}$, kde $l \leq i-1$ a $l \in \mathbb{N}$. Všimnime si, že minimálna hodnota a_{i+1} cez všetky hodnoty l je viac ako maximálna hodnota a_i resp. $2^1 + 2^i > 2^{i-1} + 2^{i-1}$ z čoho máme,že možné hodnoty sa vrámci indexov neprekrývajú. Teda vrámci možných hodnôt daného a_i, ktoré sú menšie ako 2^i, existuje úsek dĺžky aspoň $(2^{i-1} + 2^{i-1}) - (2^{i-1} + 2^{i-2}) - 1 = 2^{i-2} - 1$, kde nemôže byť žiadne a_i v žiadnej postupnosti. Pre $n < 8$ je $\lceil \frac{n}{20} \rceil = 1$. Stačí voliť 1-ku ako hľadaný úsek. Pre $n \geq 8$. Nájdime k, že $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Vieme, že pre $n = 2^k$ existuje úsek dĺžky $2^{k-2} - 1$ z minulého odseku ale to nám stačí tomto prípade, lebo

$$2^{k-2} - 1 > 2^{k-3} = \lceil \frac{2^{k+1}}{16} \rceil > \lceil \frac{2^{k+1}}{20} \rceil > \lceil \frac{n}{20} \rceil$$

(Eliška Macáková)

Úloha G1. *Nechť ABC je ostroúhlý různostranný trojúhelník, pro nějž platí $|CA| > |CB|$. Uvnitř ABC leží bod P takový, že $|\sphericalangle BPC| = 180° - |\sphericalangle BAC|$. Přímky BP a CP protínají strany AC a AB postupně v bodech B_1 a C_1. Střed úsečky B_1C_1 označíme M a druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a AB_1C_1 označíme Q. Dokažte, že $|\sphericalangle PQM| = |\sphericalangle CQB_1|$.*

Řešení. Všimnime si, že P leží na kružnici AB_1C_1. Nech X je priesečník priamky PQ a kružnice ABC. Následne sa pozrime na uhol C_1PQ v ňom je priamka PB_1 antirovnobežná s priamkou AQ ale v rovnakom uhle na „druhej“ strane je priamka CX antirovnobežná s AQ. Teda CX a PB_1 sú rovnobežné analogicky aj BX a PC_1. Teda $BPCX$ je rovnobežník a PQ prechádza cez stred BC, ktorý označme N. Všimnime si teraz, že Q je Miquelov bod $\triangle ABC$ a $\triangle AB_1C_1$ teda je stred špirálovej podobnosti zobrazujúcej B na C a B_1 na C_1. Z čoho máme, že $\triangle B_1QC \sim \triangle BQC_1 \sim \triangle NQM$, lebo N a M sú stredy oba stredy ale tým že sme už ukázali,že N leží na QP tak z uvedených podobností vyplýva dokazované tvrdenie. *()*

Úloha N1. *Pro přirozené číslo n označme $\sigma(n)$ součet všech kladných dělitelů n. Najděte všechny dvojice přirozených čísel (m, n), kde $m, n \geq 2$, pro které platí*

$$\frac{\sigma(m) - 1}{m - 1} = \frac{\sigma(n) - 1}{n - 1} = \frac{\sigma(mn) - 1}{mn - 1}.$$

Řešení.

Začneme pozorovaním, že ak $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, že $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ potom $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$

Zo zadania potom
$$\frac{\sigma(mn)-1}{mn-1}=\frac{m(\sigma(n)-1)}{m(n-1)}=\frac{\sigma(m)-1}{m-1}.$$
Čo nám dá, že
$$\sigma(mn)=m\sigma(n)+\sigma(m)-m.$$
Zo symetrie platí obdobný vzťah ak vymeníme m a n. Ukážeme, že ak m alebo n majú aspoň 2 rôzne prvočinitele tak platí
$$\sigma(mn)>m\sigma(n)+\sigma(m)-m.$$
Všimnime si,že $m\sigma(n)$ sú delitele n vynásobené m teda sú zjavne delitele mn a zároveň sú všetky aspoň m, kdežto $\sigma(m)-m$ je súčet deliteľov m teda aj mn až na m teda ide o čísla menšie ako m. Z toho vieme vyvodiť, že vo všeobecnosti naozaj platí $\sigma(mn)\geq m\sigma(n)+\sigma(m)-m$. Stačí teda nájsť deliteľa mn, ktorý nie je tvaru md, kde $d\mid m$ a zároveň nedelí m.Pričom to musí platiť aj pri výmene úloh m a n. Teda predpokladajme, že n má aspoň dvoch prvočiniteľov. Teda nech p_1 a p_2 sú prvočísla, čo delia n.Ak existuje prvočiniteľ, čo nedelí m tak hľadaný deliteľ je on. Teda predpokladajme,že obe p_1 a p_2 delia m následne voľme $p_1^{v_{p_1}(m)+1}$. Toto číslo zrejme delí mn na základe predpokladov ale nedelí m ani sa nedá zapísať ako md, lebo nie je deliteľné p_2.

Pre čísla tvaru $x=p^k$, kde p je prvočíslo jednoducho zrátame, že $\frac{\sigma(x)-1}{x-1}=\frac{p}{p-1}$, čo závisí len od p a nie od exponentu. Teda už ľahko vyvodíme, že jediné riešenia sú tvaru (p^α,p^β), kde p je prvočíslo a α,β prirodzené čísla.

()

Úloha C1. *V iKSlandii je n měst. Každá dvě města jsou spojena obousměrnou leteckou linkou, která je obsluhována právě jednou ze tří leteckých společností. Miško by rád cestoval po iKSlandii, ale protože je chudý student, může si koupit měsíční lístek jen od jedné ze společností. Najděte největší přirozené k takové, že si Miško umí bez ohledu na to, které spoje jsou obsluhovány kterou společností, vybrat jednu z nich a počáteční město tak, aby mohl navštívit alespoň k měst.*

Řešení.

Úlohu vyriešime iba pre $n=4k$. Zvyšok sa dokáže obdobne modulo nejaký technický detail. Odpoveď je $2k$. Máme teda úplný graf K, ktorého hrany sú ofarbené tromi farbami. Pozrieme sa na počet vrcholov maximálne súvislého monochromatického podgrafu. Otázkou je nájsť minimum tejto hodnoty, naprieč všetkými ofarbeniami. Využijeme nasledovné lemma.

Lemma. *Nech $K_{m,n}$ je úplný bipartitný graf s časťami m a n vrcholov. Jeho hrany sú zafarbené dvoma farbami. Potom existuje spojitý podgraf s hranami rovnakej farby s najmenej $(m+n)/2$ vrcholmi.*

Důkaz. Uvažujme podgraf, ktorý dostaneme vymazaním menej početnej farby.Ukážeme, že existuje hrana ab, že $\deg a+\deg b\geq\frac{m+n}{2}$ z čoho vyplýva dokazované tvrdenie. To urobíme, tak že globálne sčítame všetky hrany a použijeme Dirichleta. Ako zvyčajne, označme V ako množinu vrcholov a E ako množinu hrán. Máme $\sum_{ab}(\deg a+\deg b)=\sum_{x\in V}(\deg x)^2$, pretože v prvom súčte sa každý $\deg a$ počíta $\deg a$ krát (keďže a je incidentný s hranami $\deg a$ krát). Teraz platí $\sum_{x\in V}(\deg x)^2=\sum_{a\in A}(\deg a)^2+\sum_{b\in B}(\deg b)^2$ a podľa nerovnosti medzi kvadratickým priemerom a aritmetickým priemerom je to aspoň $\frac{(\sum_{a\in A}\deg a)^2}{m}+\frac{(\sum_{b\in B}\deg b)^2}{n}$. Súčty v oboch čitateľoch sa rovnajú počtu hrán (lebo graf je bipartitný), čo je $e\geq\frac{mn}{2}$, takže celkovo máme $\frac{e^2(m+n)}{mn}$ ako dolnú hranicu. Teraz podľa Dirichleta existuje hrana ab so súčtom stupňov aspoň $\frac{e(m+n)}{mn}\geq\frac{m+n}{2}$ a teda aj hľadaný podgraf s toľkými vrcholmi. □

Vráťme sa k pôvodnému problému. Nech K je úplný graf na $4n$ vrcholoch Vezmime si najväčšiu možnú monochromatickú zložku a jej farba nech je povedzme biela. Nech V je jeho množina vrcholov. Predpokladajme, že $|V| < 2n$. Nech $V' := V(K) \setminus V$. Uvažujme indukovaný bipartitný graf nad partitách V, V'. Medzi V a V' nie je žiadna hrana ofarbená bielou farbou, pretože sme vzali maximálny podgraf. Podľa vyššie uvedeného tvrdenia existuje súvislý jednofarebný podgraf s aspoň $4n/2 = 2n$ vrcholmi, čo je spor s maximalitou V.

Zostáva, zostrojiť zafarbenie K_{4n} s maximálnym monochromatickým podgrafom s presne $2n$ vrcholmi. Vrcholy zoskupíme do 4 skupín A_1, A_2, B_1, B_2, z ktorých každá má n vrcholov. Hrany vyfarbíme takto: bielou farbou - tie medzi A_1 a A_2, ako aj medzi B_1 a B_2; čiernou farbou - medzi A_1 a B_1 a medzi A_2 a B_2; červenou farbou - medzi A_1 a B_2 a medzi A_2 a B_1 *()*