Zadanie 4. série

Termín odoslania: 19. novembra 2018
Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha C4. Pavel má orientovaný graf G s nekonečno vrcholmi. Nech pre každý vrchol platí, že počet hrán z neho vychádzajúcich je väčší, ako počet hrán do neho vchádzajúcich. O je fixný vrchol G. Pre ľuvoboľné prirodzené číslo n označme V_n počet vrcholov, ktoré môžu byť dosiahnuté z O prechodom cez nanajvýš n hrán (O sa počíta). Nájdite najmenšiu možnú hodnotu V_n.

Úloha N4. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktoré spĺňajú nasledujúce rovnosti:

$$f(x,x) = x, \tag{1}$$

$$f(x,y) = f(y,x) \tag{2}$$

$$(x+y)f(x,y) = yf(x,x+y), \tag{3}$$

pre všetky usporiadané dvojice $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Úloha G4. Kružnice ω a Ω sa pretínajú v bodoch A a B. Nech M je stred oblúku AB na kružnici ω (M leží vo vnútri Ω). Tetiva MP kružnice ω pretína Ω v Q (Q leží vnútri ω). Nech ℓ_P je dotyčnicou k ω v P a nech ℓ_Q je dotyčnicou k Ω v Q. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku vytvorenému priamkai ℓ_P, ℓ_Q a AB sa dotýka Ω v práve jednom bode.

Úloha A4. Existujú také polynómy P, Q so stupňom aspoň 2018, ktoré spĺňajú $P(Q(x)) = 3Q(P(x)) + 1$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$?