

Zadanie 6. série

Termín odoslania: 19. január 2026

Adresa submitka: www.iksko.org/submit

Úloha A6. Nech $\alpha > 1$ je iracionálne číslo a L je celé číslo také, že $L > \frac{\alpha^2}{\alpha-1}$. Postupnosť $x_1, x_2, \dots$ spĺňa podmienku, že $x_1 > L$ a pre všetky kladné celé čísla n ,

$$x_{n+1} = \begin{cases} \lfloor \alpha x_n \rfloor & \text{ak } x_n \leq L \\ \lfloor \frac{x_n}{\alpha} \rfloor & \text{ak } x_n > L \end{cases}.$$

Dokážte, že postupnosť je od istého bodu periodická s nepárnou periódou, ktorej dĺžka nezávisí od x_1 .

Úloha G6. V trojuholníku ABC označme D stred strany BC . Priamka AD pretína druhýkrát kružnicu opísanú ABC v bode P . Nech bod E leží na úsečke AC tak, že priamka AC je dotyčnicou kružnice BPE . Analogicky nech F leží na úsečke AB tak, že priamka AB je dotyčnicou kružnice CPF . Dokážte, že priamky BC a FE sú rovnobežné.

Úloha C6. Nech $X_1, \dots, X_n$ ($n > 1$) sú body v štvorci s hranou dĺžky 1. Nech r_i je vzdialenosť bodu X_i k najbližšiemu bodu, ktorý je rôzny od neho. Dokážte, že

$$r_1^2 + \dots + r_n^2 \leq 4.$$

Úloha N6. Nech k a d sú dve rôzne kladné celé čísla väčšie ako 1. Na tabuli je napísaných konečne veľa (nie nutne odlišných) celých čísel. Krivoš môže vymazať k po sebe idúcich prvkov aritmetickej postupnosti s diferenciou, ktorá nie je deliteľná k . Podobne, David môže vymazať d po sebe idúcich prvkov aritmetickej postupnosti s diferenciou, ktorá nie je deliteľná d . Počiatočné čísla na tabuli majú tú vlastnosť, že Krivoš aj David ich môžu vymazať všetky (nezavisle od seba) v konečnom počte krokov. Dokážte, že rozdiel medzi najväčším a najmenším číslom na tabuli je aspoň $\varphi(k) + \varphi(d)$ ¹.

¹ $\varphi(n)$ označuje Eulerovu funkciu, t. j. počet kladných celých čísel nepresahujúcich n , ktoré sú nesúdeliteľné s n