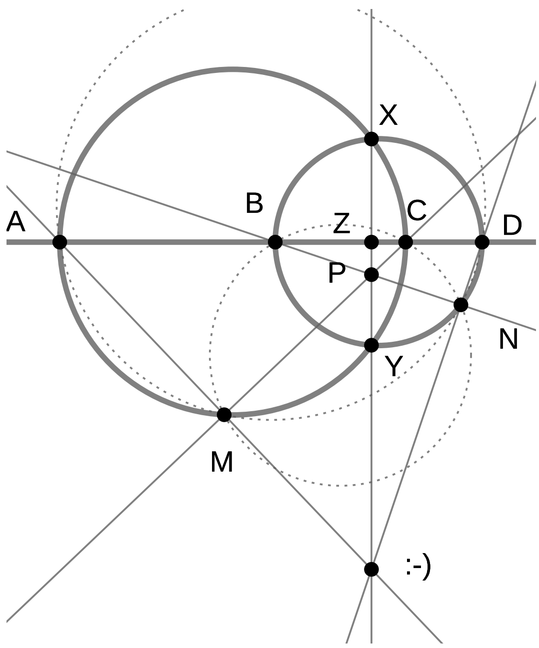
TR *i*KS ko

Úloha 1. *Na přímce leží různé body A, B, C, D v tomto pořadí. Kružnice s průměrem AC se protne s kružnicí s průměrem BD v bodech X a Y. Úsečky XY a BC se protnou v bodě Z. Bod $P \neq Z$ je nějaký bod na úsečce XY. Přímka CP protne kružnici s průměrem AC v bodech M a C. Podobně přímka BP protne kružnici s průměrem BD v bodech N a B. Dokaž že se přímky AM, DN, XY protnou ve společném bodě.*

Řešení. Přímka XY je chordála dvou kružnic ze zadání, bod P tedy leží na chordále a platí $|PM| \cdot |PC| = |PN| \cdot |PB|$, z čehož plyne (mocnost ke kružnici) že body M, N, B, C leží na kružnici. Dále $|\angle NDB| = 90° - |\angle NBD|$ a $|\angle NMA| = 90° + |\angle NMC| = 90° + |\angle NBC|$, tedy že $|\angle NMA| + |\angle NDA| = 180°$, tedy že body M, N, A, D leží na kružnici. Tady jsme využili obvodové úhly a fakty, že $\angle NBD = \angle NBC$ a $\angle NDA = \angle NDB$, a že AC, BD jsou průměry používaných kružnic. Pak ale XY je chordála kružnic $AMXY$ a $DNXY$, potom AM je chordála kružnic $AMXY$ a $MNAD$, a ještě DN je chordála kružnic $MNAD$ a $DNXY$. Tyto tři přímky se tedy protnou v potečním středu zmíněných tří kružnic, což dokazuje tvrzení ze zadání.



□

Úloha 2. *Dva hráči hrají následující hru. Na začátku je prázdná tabulka 5×5 polí. Poté se hráči střídají v tazích, kdy v lichých tazích napíše první hráč do nějakého prázdného pole 1. V sudých tazích napíše druhý hráč do libovolného prázdného pole číslo 0. Až je velký čtverec zaplněn, skóre hry je maximální součet v nějaké souvislé tabulce 3×3 v původní tabulce[1]. První hráč se snaží skóre maximalizovat, druhý minimalizovat. Jaké je skóre hry pokud oba hrají optimálně?*

Řešení. Skóre bude 6. Nejprve popíšeme strategii druhého hráče po které bude skóre nejvýše 6. Uvažme následující tabulku. Kdykoli první hráč zaplní políčko na němž je nějaká číslice, druhý hráč zaplní druhé políčko na němž je tato číslice, případně zaplní libovolné políčko, pokud je ono druhé políčko již zaplněno, nebo první hráč hraje na políčko označení $*$. Druhý hráč tedy umí zajistit, že v každé podtabulce 3×3 je alespoň třikrát 0. Skóre je nejvýše 6.

0	1	2	3	4
0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
5	6	7	8	9
*	*	*	*	*

Teď popíšeme strategii prvního hráče, který umí dosáhnout tohoto skóre. Nejprve zaplní středové políčko. Poté zahraje druhý hráč na libovolné pole označené 0 v následující tabulce,[2] a následně první hráč zahraje svůj další tah vedle středu, opět odkazuji na následující tabulku:

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
		1		
		1		

Pokud druhý hráč nenapíše 0 do spodního řádku, doprostřed, pak tam následně zahraje první hráč, a buď tabulka 3×3 vpravo dole, nebo vlevo dole, obsahuje 6 prázdných polí a 3 políčka s 1, takže první hráč snadno zaplní 3 z těch zbylých. V opačném případě zahraje první hráč tah vedle středu:

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
a	1	1	a	
a	b	1	a	
a	b	0	a	

V tabulce je šest políček označených a a dvě označená b. Ať bude druhý hráč hrát jakkoli, dokáže první hráč obsadit alespoň jedno políčko b a alespoň tři políčka označená a. Potom bude buď levý dolní, nebo prostřední dolní tabulka 3×3 obsahovat součet alespoň 6. Skóre je tedy alespoň 6, tedy právě 6 při optimálních strategiích obou hráčů.

□

[1] takových tabulek 3×3 je 9

[2] Toto je búno kvůli symetrii.

Úloha 3. *Nechť $f(n)$ je nejmenší přirozené číslo takové, že po $f(n)$-násobné aplikaci jakékoli permutace na sekvenci délky n dostaneme původní pořadí. Dej předpis jak spočítat $f(n)$.*

Řešení. Pro každé $k = 2, \ldots n$ můžeme zkonstruovat permutaci která cyklicky posune prvních k prvků o 1 pozici a ostatní zachová. Taková permutace musí být opakovaná kl-krát pro nějaké přirozené l, aby nezměnila sekvenci na niž ji aplikujeme. Abychom tedy měli zaručeno, že se po $f(n)$ aplikacích permutace z této rodiny původní sekvence nezmění, musí platit že $k|f(n)$ pro každé $k = 2, \ldots, n$. Zároveň je lehké ukázat, že pro každou pozici a libovolnou permutaci platí, že po několika (nejvýše n) aplikacích dané permutace se na tuto pozici vrátí původní prvek. Těmito úvahami[3] jsme dospěli k tomu, že $f(n) = \mathrm{lcm}(2, 3, \ldots n)$ po lehkém zneužití notace. □

[3] První úvaha říká, že $f(n)$ je alespoň tolik, druhá pak že takhle velké $f(n)$ postačuje.