Riešenia 4. série

Úloha A4. *Je dané prirodzené číslo $n \geq 4$ a kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spĺňajúce rovnosť $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Dokážte, že*

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{1+x_{n-1}+x_{n-1}x_n} + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1.$$

Riešenie. Optimisticky odhadneme ostře zezdola každý ze zlomků tak, že ve jmenovateli budeme pokračovat v naznačené posloupnosti, aby měla n členů. Odhad pro první zlomek bude následovný, analogicky pro ostatní:

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} > \frac{1}{1+x_1+x_1x_2+x_1x_2x_3+\ldots+x_1x_2\cdots x_{n-1}}. \tag{1}$$

Stačí pak dokázat následující nerovnost, kde indexy bereme modulo n:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i+x_ix_{i+1}+x_ix_{i+1}x_{i+2}+\ldots+x_ix_{i+1}\cdots x_{i-2}} \geq 1. \tag{2}$$

Teď si všimneme, že když jmenovatele $(i+1)$-tého zlomku (což bude J_{i+1}) vynásobíme x_i, dostaneme J_i, což ilustruje následující tabulka pro případ $i = 1$, znaménka $+$ vynechány pro přehlednost:

$$\begin{array}{rcccccccl} J_2 = & 1 & x_2 & x_2x_3 & x_2x_3x_4 & \ldots & x_2x_3\cdots x_n & & \\ x_1 \cdot J_2 = & x_1 & x_1x_2 & x_1x_2x_3 & x_1x_2x_3x_4 & \ldots & \underbrace{x_1x_2x_3\cdots x_n}_{=1} & = J_1 & \end{array}$$

Pokud vynásobíme J_i číslem $x_jx_{j+1}\cdots x_{i-1}$, dostaneme J_j. Můžeme tedy všechny zlomky ze součtu ve 2 převést na společného jmenovatele a dostaneme

$$\frac{\overbrace{1}^{1} + \overbrace{x_1}^{2} + \overbrace{x_1x_2}^{3} + \overbrace{x_1x_2x_3}^{4} \cdots + \overbrace{x_1x_2\cdots x_{n-1}}^{n}}{1+x_1+x_1x_2+x_1x_2x_3+\ldots+x_1x_2\cdots x_{n-1}} \geq 1, \tag{3}$$

kde závorky indikují kolikátý sčítanec ze sumy přispěl touto hodnotou. Teď už nedá moc práce si všimnout, že se čitatel i jmenovatel ve 3 rovnají, nerovnost přechází v rovnost, tedy platí.

Poznámky opravovateľa. Přišlo spoustu pěkných řešení jako to vzorové (spíše naopak, měl jsem spoustu inspirace pro vzorák :-)). Několik řešitelů se také uchýlilo k indukci.

(Vašek Voráček)

Úloha N4. *Nájdite všetky kladné celé n, pre ktoré je*

$$\frac{n^2+1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2+2}$$

celé číslo.[1]

Riešenie. Dokážeme, že také n neexistuje.

Nejprve označíme $a = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ a $b = n^2 - a^2$. Platí

$$\begin{aligned}(a+1)^2 &> n^2 = a^2 + b,\\ 2a+1 &> b,\\ 2a &\geq b.\end{aligned}$$

Zlomek ze zadání upravíme:

$$\frac{(a^2+b)^2+1}{a^2+2} = \frac{a^4+2a^2b+b^2+1}{a^2+2} = \frac{(a^2+2)(a^2+2b-2)-4b+4+b^2+1}{a^2+2} =$$
$$= a^2+2b-2+\frac{b^2-4b+5}{a^2+2}.$$

Protože a i b jsou celá čísla, hledáme takové dvojice a a b, že zlomek $\frac{b^2-4b+5}{a^2+2}$. K tomu by muselo existovat celé číslo k, pro nějž by $b^2-4b+5 = k(a^2+2)$. Odhadneme ho shora pomocí $2a \geq b$. Platí

$$b^2-4b+5 < b^2+5 \leq 4a^2+5 < 4a^2+8 = 4(a^2+2).$$

Protože některé nerovnosti byly ostré, musí platit $k < 4$. Zároveň $b^2-4b+5 = (b-2)^2+1 > 0$ a $a^2+2 > 0$, tudíž k musí být kladné, z čehož $k \in \{1,2,3\}$. Zbývá rozebrat tyto čtyři případy.

$k = 1$. Pro tento případ dostáváme

$$\begin{aligned}b^2-4b+5 &= a^2+2,\\ b^2-4b+3 = (b-2)^2-1 &= a^2.\end{aligned}$$

Rozdíl druhých mocnin je pro přirozená čísla vždy větší než 1, tedy by muselo platit $a = 0$. Potom by muselo ale platit $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = 0$, což pro přirozená n nelze.

$k = 2$. Dostáváme

$$\begin{aligned}b^2-4b+5 &= 2a^2+4,\\ b^2-4b+1 = (b-2)^2-3 &= 2a^2.\end{aligned}$$

Podívejme se na rovnici modulo 8. Kvadratické zbytky modulo 8 jsou 0, 1 a 4, tudíž $2a^2$ je kongruentní 2 nebo 0 a $(b-2)^2-3$ je kongruentní 5, 6 nebo 1. Levá a pravá strana tudíž nemohou dávat stejný zbytek po dělení 8, tudíž se nemohou rovnat.

$k = 3$. Nyní platí

$$\begin{aligned}b^2-4b+5 &= 3a^2+6,\\ b^2-4b+4 = (b-2)^2 &= 3a^2+5.\end{aligned}$$

Kvadratické zbytky modulo 3 jsou 0 a 1. Protože bez ohledu na a platí $3 \mid 3a^2$, pravá strana je kongruentní 2. Levá strana je ale čtverec, takže musí být kongruentní 0 nebo 1, tudíž se strany opět nemohou rovnat.

[1] Pre reálne x označuje $\lfloor x\rfloor$ najväčšie celé číslo menšie alebo rovné x.

Pro všechny případy jsme dospěli k závěru, že neexistuje a a b splňující zadání, tedy neexistuje ani n splňující zadání.

Poznámky opravovateľa. Většina řešení postupovala s mírnými obměnami stejně jako vzorové.
(Majda Mišinová)

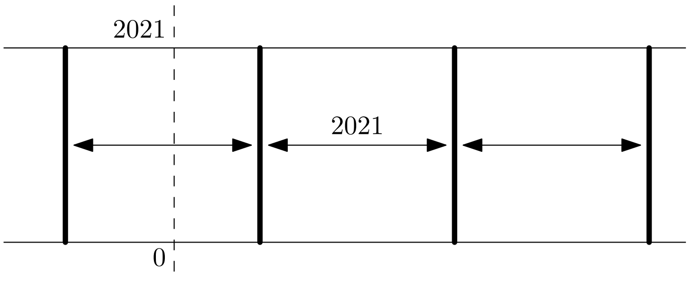
Úloha C4. *Pepa a Matěj hrajú nasledujúcu hru v rovine. Najskôr si Pepa zvolí nejakú funkciu $f : \mathbb{R} \to \langle 0, 2021 \rangle$. Body (x, y) v rovine, ktoré spĺňajú*

$$f(x + f(y)) = y,$$

zafarbíme ružovo. Na začiatku hry sa Matěj postaví do nejakého ružového bodu, vzápätí sa do nejakého ružového bodu postaví aj Pepa. Potom sa budú striedať v ťahoch. Začína Pepa, ktorý v každom svojom ťahu skočí na ľubovoľný ružový bod, ktorý je od neho vzdialený nanajvýš 2021. Matěj vo svojom ťahu skočí na nejaký ružový bod, ktorý je vzdialený nanajvýš c od neho.[2] *Určte najmenšie možné reálne číslo c, pre ktoré vie Matěj vždy chytiť Pepu. Matěj Pepu chytí, ak po nejakom ťahu s ním stojí v rovnakom bode.*

Riešenie. Keďže obor hodnôt f je $\langle 0, 2021 \rangle$, tak aj pre všetky body $[x, y]$ platí vďaka rovnosti $y \in \langle 0, 2021 \rangle$.

Teraz si predstavme, že keby našu f spĺňali práve takéto ružové body:



Tak vtedy by pre $c < 2 \times 2021$ vedel Matěj v jednom kroku zmeniť svoju $x-$ovú súradnicu najviac o 2021, to však vie aj Pepa, teda Matěj Pepu nedobehne.

Ostáva nám a) Vymyslieť takú f; b) Dokázať, že $c = 4042$ stačí.

a) Skúsme $f(x) = x \mod 2021 = 2021x \times \{\frac{x}{2021}\}$. Potom dosadením máme:

$$\begin{aligned}(x + (y \mod 2021)) \mod 2021 &= y\\ (x + y) \mod 2021 &= y\end{aligned}$$

Keďže $y \in \langle 0, 2021 \rangle$, tak:

$$\begin{aligned}(x + y) \mod 2021 &= y \mod 2021\\ x &\equiv 0 \mod 2021\end{aligned}$$

A teda ružové body budú $[k \times 2021, y]$, kde $y \in \langle 0, 2021 \rangle$. Takže vieme spraviť funkciu, ktorá pre $c < 2021$ nedovolí Matějovi prekonávať v jednom ťahu viac „ružových úsečiek“, ako Pepovi. Teda $c \geq 4042$.

[2]Pepa aj Matěj môžu vo svojom ťahu aj ostať na rovnakom bode.

b) Stačí nám dokázať, že pre Matěja je možné v konečnom čase prejsť medzi hocijakou dvojicou ružových bodov. Prečo? Nech sa Pepa postavil do bodu P. Po niekoľkých ťahoch došiel Matěj do P. Každú dva Pepove skoky, ktoré Pepa vykonal potom môže Matěj (vďaka trojuholníkovej nerovnosti) vykonať jedným skokom, takže ho iste dobehne.

Označme $H(f) \subset \langle 0, 2021\rangle$ obor hodnôt funkcie f. Symbolom $f^{-1}(y)$ značíme množinu $\{x | f(x) = y\}$. Vezmime si $y_0 \in H(f)$, preň nájdeme vyhovujúce x. Môžme upraviť rovnosť $f(x + f(y_0)) = y_0$ aplikovaním $\backslash f^{-1}$ a dostať:

$$x = -f(y_0) + f^{-1}(y_0)$$

Zoberme si nejaký ružový bod $Z = [a, b]$. Keďže f je definovaná na $\mathbb{R}$, tak $f^{-1}(y_0)$ pre y_0 neznáme, si môžme zvoliť ľubovoľne, napríklad ako $a + 2021 + 1$. Potom, keďže $-f(y_0) \in \langle -2021, 0\rangle$, (bez ohľadu na to, ako sme museli navoliť y_0) tak $x = a + 2022 - f(y_0) \to x \in \langle a + 1, a + 2022\rangle$. Keďže x, y_0 spĺňajú podmienku, $[x, y_0]$ je ružový. Vzdialenosť Z od $[x, y_0]$ je $\sqrt{(x-a)^2 + (y_0 - b)^2} \leq \sqrt{(2022)^2 + (2021)^2} < 4042$, a zároveň $\sqrt{(x-a)^2 + (y_0 - b)^2} \geq \sqrt{(1)^2 + (0)^2}$. Teda $[x, y_0]$ je od Z vzdialený aspoň 1, a zároveň Matěj dokáže skočiť medzi Z a $[x, y_0]$.

Majme dva ružové body $A = [A_x, A_y]$, $B = [B_x, B_y]$, $A_x < B_x$. Matěj dokáže doskákať z A_x do B_x konštruovaním bodov $[x, y_0]$, a teda aj z B do A.

Vtedy však už vie doskákať z M do P a následne chytiť Pepu.

Poznámky opravovateľa. Vzorák je orientovaný skôr motivačne, než kompaktne, na lepší prehľad o tom, ako taká úloha môže "vznikať". Nakoniec však častejšie riešenia, ktoré si všimli chytrého predpisu pre ružové body $[c - f(f(c)), f(c)]$, ukázali priechodnosť mapy cez toto. Najčastejšou dierou v správnom riešení bolo chýbajúce ošetrenie prípadu, že najbližší nájdený bod je totožný. Cvičenie: skúste si predstaviť ružové body pre $f(x) = x \mod c, c \in (2021, 4042)$.

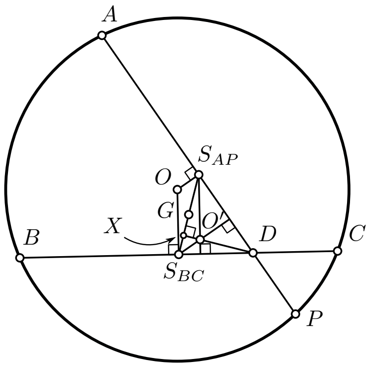
(Martin „Andy“ Andričík)

Úloha G4. *Je daný trojuholník ABC s kružnicou opísanou ω. Majme bod P na ω rôzny od A, B, C. Priamky AP, BP, CP pretnú BC, CA, AB po rade v bodoch D, E, F. Označme X kolmý priemet bodu D na priamku spájajúcu stredy AP a BC, potom Y kolmý priemet E na priamku spájajúcu stredy BP a CA, a nakoniec Z kolmý priemet F na priamku spájajúcu stredy CP a AB. Dokážte, že keď sa P bude pohybovať po ω, tak množina stredov všetkých kružníc opísaných $\triangle XYZ$ bude kružnica.*

Riešenie. Označme G těžiště $ABCP$ a O střed ω. Dále označme S_{AP} střed AP a S_{BC} střed BC. A nakonec označme O' překlopené O podle G.

Těžiště čtyřúhelníka můžeme najít tak, že zprůměrujeme těžiště AP a těžiště BC. Tedy G je střed $S_{BC}S_{AP}$. Z toho plyne, že $OS_{BC}O'S_{AP}$ je rovnoběžník. Protože O je střed kružnice opsané $ABCP$, tak $OS_{AP} \perp AP$ a $OS_{BC} \perp BC$. Tedy z rovnoběžníka $S_{AP}O' \perp BC$ a $S_{BC}O' \perp AP$. Tedy O' je ortocentrum $S_{AP}S_{BC}D$. Neboli D, O', X leží na přímce a tedy $|\sphericalangle O'XG| = 90°$.

Takže bod X leží na kružnici nad průměrem GO'. Analogicky na této kružnici leží i Y a Z. Zbývá ukázat, že její střed se pohybuje po kružnici. Bod O je pevný. Bod G je těžiště A, B, C, P. Protože A, B, C jsou pevné a P se pohybuje na kružnici, tak i G se pohybuje na kružnici. Střed kružnice nad průměrem GO' získáme z G stejnolehlostí se středem v O a koeficientem $\frac{3}{2}$, tedy se také pohybuje po kružnici.



Poznámky opravovateľa. Úloha byla zrádná v tom, že už i obrázek samotného zadání byl dosti komplikovaný. Všechna došlá řešení byla správná.

(Radek Olšák)