



Úloha 1. Najdte všetky konvexné mnohoúhelníky $A_1A_2 \dots A_n$ sledujúce vlastnosti: Uvnitř mnohoúhelníku existuje bod P , pro který platí

$$\sum_{i=1}^n |PA_i|^2 = 2S,$$

kde S značí obsah mnohoúhelníka

Řešení. Nech α_i je uhol medzi PA_i a PA_{i+1} . Potom

$$2S = \sum_{i=1}^n |PA_i| |PA_{i+1}| \sin \alpha_i \leq \sum_{i=1}^n |PA_i|^2 = 2S,$$

kde sme využili AG-čko a že sínus je menší než 1. Všade nastávajú rovnosti teda musí ísť o štvorec. □

Úloha 2. Buď n přirozené číslo, $n \geq 2$. Jaký největší počet záporných koeficientů může mít polynom $p(x)^2$, je-li $p(x)$ reálný polynom stupně n ?

Řešení. Odpoveď je $2n - 2$. Vezmite $p(x) = x^n + 1 - m(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x)$. potom, po poslaní $m \rightarrow 0$, sú koeficienty všetkého okrem $x^{2n}, x^n, 1$ záporné.

Pre potrebu predpokladajme, že $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$. Všimnite si, že vyžadujeme, aby všetky okrem $x^{2n}, 1$ boli záporné. Indukciou na k dokážeme, že koeficient x^{n-k} je záporný. Koeficient x^{2n-k} je skutočne

$$a_n a_{n-k} + a_{n-1} a_{n-k+1} + \dots + a_{n-k+1} a_{n-1} + a_{n-k} a_n,$$

ale podľa našej indukčnej hypotézy platí, že $a_{n-k+\ell} a_{n-\ell} > 0$, pretože oba členy sú záporné. Preto platí, že $a_n a_{n-k} < 0$, ako sme chceli. To však znamená, že koeficient x je $a_1 a_0 > 0$, čo je spor. □

Úloha 3. Nech ABC je trojuholník s $\angle ABC = \angle BCA = 40^\circ$. Os uhla ABC pretína AC v bode D . Dokážte, že $BD + DA = BC$.

Řešení. Všimnime si, že $\angle A = 100^\circ$. Nech D' je bod na BC taký, že $BD = BD'$. Preto $\angle BDD' = \angle BD'D = 80^\circ$. Takisto $\angle DD'C = 100^\circ$ a $\angle D'DC = 40^\circ$, takže

$DD' = D'C$. Stačí dokázať, že $AD = DD'$. Všimnite si, že $\angle BAD + \angle DD'B = 100^\circ + 80^\circ = 180^\circ$, takže $ADD'B$ je tetivový takže

$$\angle D'AD = \angle DBD' = 20^\circ = \angle ABD = \angle ADD'$$

, takže $AD = DD'$, ako sme chceli. \square

Úloha 4. Ukažte, že jediný polynom P s celočíselnými koeficienty, ktorý splňuje $n \mid P(2^n)$ pro každé prirodzené n , je nulový polynom

Řešení. Nech p a q sú dve nepárne prvočísla. Všimnite si, že $pq \mid P(2^{pq}) \implies p \mid P(2^{pq}) \implies P(2^{pq}) \equiv 0 \pmod{p}$. Teraz máme podľa Fermatovej malej vety $2^{pq} \equiv (2^q)^p \pmod{p}$, takže máme

$$0 \equiv P(2^{pq}) \equiv P(2^q) \pmod{p} \implies p \mid P(2^q).$$

Teraz v poslednom vzťahu deliteľnosti, ak vezmeme p dostatočne veľké, dostaneme $P(2^q) = 0$. Ale to platí pre ľubovoľné nepárne prvočísla q , takže $P(x) = 0$ pre nekonečne veľa x . To núti, aby P bolo identicky nulové, ako sme chceli. \square

Úloha 5. Na kytarovaní se sešlo n účastníků a Vítek přinesl zpěvník. Ukázalo se, že každou písničku umí alespoň dva účastníci a platí, že kdykoli nějakí dva účastníci umí nějaké dvě písničky (oba obě), pak každou z těchto dvou písniček umí jiný počet účastníků. Ukažte, že ve zpěvníku je nanejvýš $(n-1)^2$ písniček.

Řešení. Počítejme písničky co umí právě k účastníků. Každou umí $\binom{k}{2}$ účastníků a celkový počet je $\binom{n}{2}$. Z podmínky takových písniček je $\lfloor \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \rfloor$. Co se už standardně teleskopicky sečte. \square