Zadanie 2. série

Termín odoslania: 10. jún 2019

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha G2. V tetivovom päťuholníku $ABCDE$ platí $|AE| = |ED|$. Označme P priesečník priamok AC a BD. Nech body X a Y ležia postupne na polpriamkach opačných k polpriamkam AB a DC tak, že $|AP| = |DY|$ a $|DP| = |AX|$. Ukážte, že $PE \perp XY$.

Úloha C2. Dané sú prirodzené číslo n a množina A, ktorá obsahuje n rôznych zvyškov po delení n^2. Ukážte, že existuje množina B obsahujúca n rôznych zvyškov po delení n^2 taká, že aspoň polovica zvyškov po delení n^2 sa dá vyjadriť ako súčet prvku A a prvku B (brané modulo n^2).

Úloha A2. Rozhodnite, či existujú funkcie $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že jediná funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá pre každé $x \in \mathbb{R}$ spĺňa

$$f(g(x)) = g(f(x)) \quad a \quad f(h(x)) = h(f(x))$$

je $f(x) = x$.

Úloha N2. Nech $\mathbb{Z}_n$ značí množinu všetkých zvyškov po delení n. Pre ktoré prirodzené čísla n existuje funkcia $g : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, pre ktorú sú všetky funkcie $g(x)$, $g(x) + x$, $g(x) + 2x$, $\ldots$, $g(x) + 2019x$ bijekcie?[1]

[1] Pričítanie berieme ako zvyšky modulo n, napr. pre $n = 6$ je $4 + 3 = 1$.