Řešení 1. série

Úloha N1. *Pro kladné celé číslo n označme jako $f(n)$ počet čísel $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ takových, že j a n jsou soudělná*[1]*, ale n není násobkem j. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo k má rovnice $f(n) = k$ jen konečně mnoho řešení n.*

Řešení.

Předně si všimněme, že pokud je n prvočíslo, nutně platí $f(n) = 0$. Nula ale není kladné celé číslo, tudíž výsledek neohrožuje a stačí nám zabývat se složenými čísly.

Tvrdím, že pro $n > 4(k+1)^2$ bude $f(n) > k$, tudíž rovnost pak může nastat pouze pro n menší nebo rovna tomuto výrazu a těch bude vždy konečně mnoho.

Uvažujme nejmenší dělitel d čísla n větší než jedna. Ten bude jistě menší než $\sqrt{n}$ (neboť n je složené). Pak platí:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} &> 2(k+1) \\ \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} &> 2(k+1)d \\ \frac{n}{2} &> (k+1)d \qquad (1) \\ n - (k+1)d &> \frac{n}{2} \qquad (2) \end{aligned}$$

Všimněme si, že pro $i = 1,\ 2,\ \dots k+1$ jsou čísla $n - id > \frac{n}{2}$ (2) a zároveň menší než n (1), takže nemohou být děliteli n. Zároveň ale platí $d|n$ a $d|id$, tudíž i $d|(n-id)$ a čísla id jsou soudělná s n.

Našli jsme tak $k+1$ čísel soudělných s n, ale takových, že n není jejich násobkem, tudíž $f(n) >= k+1 => f(n) > k$.

Pro všechna $n > 4(k+1)^2$ tudíž platí, že $f(n) > k$ a tedy $f(n) = k$ může nastat pouze pro $n <= 4(k+1)^2$ a těch je konečně mnoho.

Poznámky opravujícího. Řešení přišlo spoustu a valná většina se pomocí elegantních nebo méně elegantních odhadů zdárně dopracovala k cíli. Někteří řešitelé se ale trošku prali s nějakým pořádným důkazem svých tvrzení a hypotéz, za což jsme pak strhávali body.

(Adéla Karolína Žáčková)

Úloha G1. *Na parabole p s ohniskem F leží body A, B. Tečny k p v bodech A, B se protnou v bodě T. Dokažte, že trojúhelníky AFT a TFB jsou si podobné.*

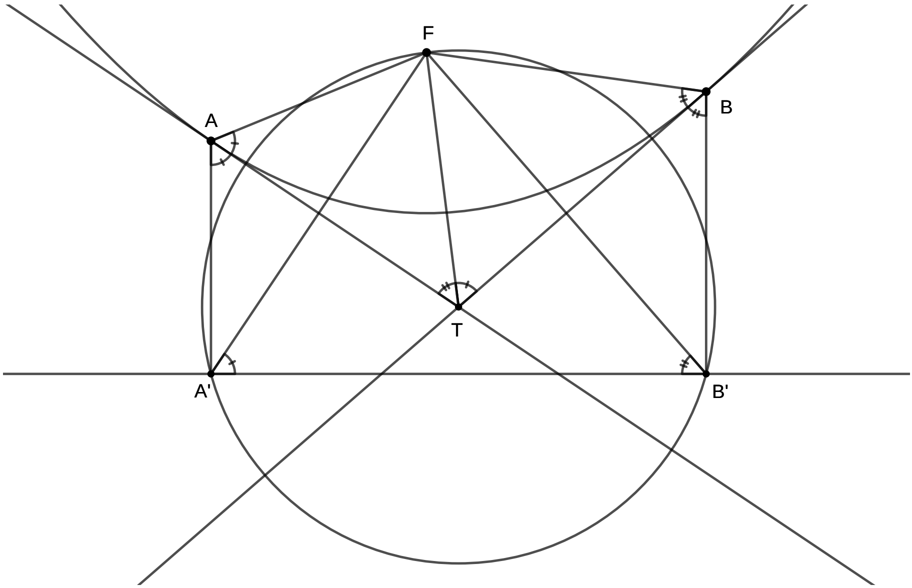
Řešení. Parabola je množina bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od riadiacej priamky a od ohniska paraboly. Označme A', B' kolmé priemety A, B na riadiacu priamku. Z definície platí $|AA'| = |AF|$ a $|BB'| = |BF|$, preto sú $\triangle A'AF$ a $\triangle B'BF$ rovnoramenné.

Je známe, že dotyčnica k parabole v bode A je osou uhla $A'AF$. Keďže $\triangle A'AF$ je rovnoramenný, je dotyčnica v bode A zároveň aj osou úsečky $A'F$. Podobne platí, že dotyčnica v bode B je osou úsečky $B'F$ a preto je T stredom kružnice opísanej $\triangle FA'B'$. Všimneme si, že TB je osou uhla FTB' a TA je osou uhla FTA'. Využijeme orientované uhly modulo 180°.

$$\begin{aligned} \measuredangle(AF, AT) &\equiv \measuredangle(AT, AA') && AT \text{ je osou uhla } A'AF \\ &\equiv \measuredangle(AT, A'F) + \measuredangle(A'F, A'B') + \\ &\quad + \measuredangle(A'B', A'A) \\ &\equiv \measuredangle(A'F, A'B') && AT \perp A'F,\ A'B \perp A'A \implies \\ & && \implies \measuredangle(AT, A'F) + \measuredangle(A'B, A'A) \equiv 0^\circ \\ &\equiv \measuredangle(TF, TB) && \text{Obvodový-stredový uhol, } TB \text{ je osou } FTB' \end{aligned}$$

[1] Přirozená čísla a, b nazveme *soudělnými*, pokud mají společného dělitele většího než 1.

Analogicky dostaneme $\measuredangle(BF, BT) \equiv \measuredangle(TF, TA)$ z čoho už podľa vety uu vyplýva podobnosť trojuholníkov AFT a TFB.



Poznámky opravujícího. Približne polovica riešení išla analytickou cestou a polovica synteticky. Tí čo išli analyticky a dopracovali sa až k záveru mali všetci plný počet. Avšak veľa syntetických riešení nemalo ošetrené všetky konfigurácie, za čo im bol ztrhuntý bod.

(Michal Pecho)

Úloha A1. *Nechť $\mathbb{Q}[x]$ značí množinu všech polynomů v proměnné x s racionálními koeficienty. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$, které pro libovolné polynomy $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$ splňují:*

(i) $f(P \circ Q) = f(Q \circ P)$, kde $\circ$ značí operaci skládání polynomů.

(ii) Pokud $P \cdot Q \neq 0$, pak $f(P \cdot Q) = f(P) + f(Q)$.

Řešení. Ukážeme, že všechna řešení jsou ve tvaru $f(P) \equiv c \deg P$[2], kde c je libovolná racionální konstanta. Značme $[P, Q]_x$ dosazení dvojice (P, Q) do vztahu (x). Nejprve zjistíme funkční hodnoty konstantních polynomů. Dosazením $[c, 1]_i$ a $[1, 1]_{ii}$ pro $c \in \mathbb{Q}$ získáme

$$f(c) = f(c \circ 1) = f(1 \circ c) = f(1) = f(1) + f(1),$$

tudíž $f(c) = f(1) = 0$. Díky podmínce (ii) pak pro $c \in \mathbb{Q}$ a $P \in Q[x]$ platí $f(P) = f(cP)$.

Nyní si blíže určíme funkční hodnoty lineárních polynomů, konkrétně ukážeme, proč platí vztah $f(x) = f(x + c)$ pro každé $c \in \mathbb{Q}$. Dosazením $[2x + 4c, x - 2c]_i$ získáme

$$f(x) = f(2x) = f(2(x - 2c) + 4c) = f(2x + 4c - 2c) = f(2(x + c)) = f(x + c).$$

[2]Stupeň polynomu Q značíme $\deg Q$ a zde definujeme stupeň identicky nulového polynomu jako 0.

Zafixujme si nyní konkrétní vyhovující funkci f a označme hodnotu $k := f(x)$. Dokážeme, že $f(P) = k \deg P$. Postupujme indukcí vzhledem ke stupni polynomu. Základní případ $\deg P = 0$ jsme již vyřešili. Dejme tomu, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$ platí, že pro libovolný polynom $R \in \mathbb{Q}[x]$ stupně n platí $f(R) = n \cdot k$.

Uvažme nyní libovolný polynom $P \in \mathbb{Q}[x]$ stupně $n + 1$. Pak jej můžeme zapsat ve tvaru $xQ(x) + c$, kde Q je polynom stupně n. Dosadíme $[x + c, xQ]_i$

$$f(P) = f(xQ(x) + c) = f((x + c)Q(x + c)) \overset{(ii)}{=} f(x + c) + f(Q(x + c)).$$

Dle indukčního předpokladu je tato hodnota rovna $k \cdot (n+1)$, čímž je indukční krok hotov a jsme tedy doma.

Jiné řešení, podle Honzy Slívy. Ukážeme, že pro každý polynom $P \in \mathbb{Q}[x]$ a racionální konstantu c platí vztah $f(P(x) + c) = f(P(x))$.

Nejprve si vezmeme tři polynomy $A, B, C \in \mathbb{Q}[x]$ a dosadíme $[A, B \cdot C]_i$

$$\begin{aligned} f(A \circ (B \cdot C)) = f((B \circ A) \cdot (C \circ A)) &\overset{(i)}{=} f(B \circ A) + f(C \circ A) \\ &\overset{(i)}{=} f(A \circ B) + f(A \circ C) \overset{(ii)}{=} f((A \circ B) \cdot (A \circ C)). \end{aligned}$$

Nyní zapišme $P(x) = Q(x) + 2c$, kde $Q(0) = 0$. Poté do vztahu odvozeného výše dosadíme $(A, B, C) \longmapsto (x - c, Q(x) + c, Q(x) + 2c - 1)$ a máme

$$\begin{aligned} f(Q(x) + 2c) + f(Q(x) + c - 1) &= f((Q(x) + 2c)(Q(x) + c - 1)) \\ &= f((Q(x) + c)(Q(x) + 2c - 1) - c) = f(Q(x) \cdot (Q(x) + c - 1)) \\ &= f(Q(x)) + f(Q(x) + c - 1). \end{aligned}$$

Platí tedy $f(Q(x)) = f(Q(x) + 2c) = f(P(x))$.

Nyní postupujme indukcí vzhledem ke stupni polynomů. Stejně jako v předchozím řešení ukážeme, že $f(c) = 0$ pro $c \in \mathbb{Q}$ a označme $k = f(x)$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$ platí, že každý polynom Q stupně n splňuje $f(Q) = k \deg Q$. Nyní uvažme libovolný polynom $P \in \mathbb{Q}[x]$ stupně $n + 1$ a zapišme jej jako $P(x) = xR(x) + c$, kde R je polynom stupně n. Máme

$$f(P(x)) = f(xR(x) + c) = f(xR(x)) = f(x) + f(R(x)) = k(\deg Q + 1) = k \deg P.$$

Jsme tedy hotovi.

Poznámky opravujícího. Všechna úspěšná řešení se k výsledku dobrala pomocí indukce vzhledem ke stupni polynomu – záludnost úlohy spočívala pouze ve správném vynucení indukčního kroku. Překvapivě mnoho z vás ale nějakým způsobem nedořešilo základní krok či ho odbylo. První případ indukce je absolutně vitální, proto je třeba dávat pozor, že je opravdu správně!

(Zdeněk Pezlar)

Úloha C1. *Jsou dána přirozená čísla m a k. Určete nejmenší kladné reálné číslo c takové, že pro každé kladné celé číslo n a každý km-regulární graf[3] na n vrcholech existuje obarvení jeho vrcholů m barvami, v němž nejvýše cn hran spojuje dva vrcholy stejné barvy.*

Řešení. Tvrdíme, že odpověď je

$$\frac{1}{nk+1} \left(\sum_{a=0}^{kn} \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor \right) = \frac{k + n(1 + \cdots + (k-1))}{nk+1} = \frac{n\binom{k}{2} + k}{nk+1}.$$

[3] Graf nazýváme *a-regulárním*, má-li každý jeho vrchol stupeň přesně a.

Tento výraz nazvěme $r(n,k)$. Nejprve ukážeme, že $c \geq r$. Uvažujme $G = K_{kn+1}$ s vrcholy $a_1, \ldots, a_n$ obarvenými každou barvou. Pak máme $\sum \binom{a_i}{2}$ jednobarevných hran a z konvexity $\binom{\bullet}{2}$ víme, že je to alespoň

$$(n-1)\binom{k}{2} + \binom{k+1}{2} = n\binom{k}{2} + k$$

Tím jsme zjistili, že $c \geq r$, a nyní stačí ukázat, že $c \leq r$, tj. pro libovolné takový graf G můžeme získat $\leq rm$ jednobarevných hran. Uvažujme takový graf G a náhodně uspořádáme jeho vrcholy zleva doprava. Pro každý vrchol v nechť $s(v)$ označuje počet jeho sousedů nalevo. Pak můžeme greedy prohledáváním zleva doprava (kdy prohledávanému vrcholu přiřadíme barvu) vždy získat nejvýše $\left\lfloor \frac{s(v)}{n} \right\rfloor$ jednobarevných hran s pravým vrcholem v. Součet všech jednobarevných hran podle pravého vrcholu ukazuje, že vždy můžeme získat nejvýše $\sum \left\lfloor \frac{s(v)}{n} \right\rfloor$ jednobarevných hran. Výběrem vhodné permutace tedy můžeme vždy dosáhnout lepšího výsledku než

$$\mathbb{E}\left[\sum \left\lfloor \frac{s(v)}{n} \right\rfloor\right] = \sum_{a=0}^{kn} \mathbb{E}[|\{v\colon s(v) = a\}|] \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor = \sum_{a=0}^{kn} \frac{m}{kn+1} \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor = rm$$

(Petr Hladík)