Zadání 5. série

Termín odeslání: 21. prosinec 2020

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha C5. Je dán jednotkový kruh se středem S a přirozené číslo n. Kuba do kruhu (včetně jeho ohraničující kružnice) nakreslí n úseček tak, aby pro libovolnou kružnici se středem S platilo, že nanejvýš jednu z Kubových úseček protíná[1] v jejím vnitřním bodě. Určete maximální součet délek úseček, kterého Kuba může dosáhnout.

Úloha G5. V trojúhelníku ABC se kružnice vepsaná dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Nechť je X průsečík kolmice k BC procházející bodem D a přímky EF. Dále budiž Y průsečík přímky BC a osy úhlu BAC. Dokažte, že $AD \parallel XY$.

Úloha A5. Uvažujme reálné polynomy dvou proměnných P, které splňují $P(x, y) > 0$ pro každá $x, y \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali každý takový polynom P lze vyjádřit jako

$$P = Q_1^2 + Q_2^2 + \cdots + Q_n^2$$

pro nějaké přirozené n a reálné polynomy dvou proměnných $Q_1, \ldots, Q_n$.

Úloha N5. Neuspořádanou trojici přirozených čísel $\{a, b, c\}$ nazvěme *pythagorejskou*, pokud existuje pravoúhlý trojúhelník s délkami stran a, b, c. Dokažte, že pro libovolné dvě pythagorejské trojice Q, R existuje konečná posloupnost $P_1, P_2, \ldots, P_m$ pythagorejských trojic taková, že $P_1 = Q$, $P_m = R$ a pro každé $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ mají P_i a P_{i+1} nějaký společný prvek.

[1] Pod pojmem „protíná“ míníme, že nějaký vnitřní bod dané úsečky zároveň leží na dané kružnici.