Řešení 1. série

Úloha C1. *Je dáno přirozené číslo n. Žába skáče po číselné ose, přičemž začíná na nule. Když sedí na kladném čísle, skočí vždy doleva (na nižší číslo), jinak skočí doprava. Musí v nějakém pořadí naskákat n skoků o délkách $1, 2, \ldots, n$. Nechce však nikdy skočit na kterékoliv z čísel 1 až k. Určete největší k, pro které to žába dokáže.*

Řešení. Ako prvé si môžeme všimnúť, že oblasť, v ktorej sa môžeme počas skákania nachádzať je ohraničená, keďže skáčeme vždy smerom k „zakázanému“ intervalu (1 až k). Zrejme sa nemôžeme dostať na menšie číslo ako $k+1-n$, ani na väčšie číslo ako n (pretože skáčeme najviac o n a doľava skáčeme z pozície aspoň $k+1$ a doprava z pozície najviac 0). Skokom dĺžky k nepreskočíme celý zakázaný interval, preto ním musíme skákať vrámci kladných čísel alebo vrámci nekladných čísel (skokom dĺžky k skáčeme, keďže zrejme $k \leq n$). Oba intervaly majú veľkosť $n-k-1$, preto musí platiť:

$$k \leq n-k-1,$$
$$k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Pre $k = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ spravíme konštrukciu. Rozdelíme skoky do dvojíc s rozdielom $k+1$, pri nepárnom n pripustíme aj skok dĺžky 0 (aby aj skok dĺžky $k+1$ mal dvojicu). Vždy vykonáme najskôr väčší skok z dvojice a potom menší. Takto vždy skočíme na číslo väčšie (alebo rovné) $k+1$, potom na číslo $k+1$, potom na nekladné číslo a potom na číslo 0. Týmto postupom vyčerpáme všetky skoky od 0 do n a nikdy neskočíme do intervalu 1 až k.

Poznámky opravujícího. Keďže v zadaní je napísané, že žaba nemôže skočiť n čísla 1 až k, bolo by dobré okomentovať prípady, keď $k = 0$. Inak, väčšina riešení postupovala podobne. Vo veľa riešeniach bolo delenie na prípady podľa parity čísla n. Tomu sa dalo vyhnúť aj pri odhade, aj pri konštrukcii. Pár riešiteľov dostalo odhad $k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ úvahou, že „malými“ skokmi dĺžky a strácame vzdialenosť a od zakázaného intervalu a „veľkými“ skokmi dĺžky b vieme preskočiť zakázaný interval a získať vzdialenosť $b-k-1$. *(Jakub „Šošo“ Šošovička)*

Úloha A1. *Je dáno reálné číslo α takové, že posloupnost $\{\alpha\}, \{\alpha^2\}, \{\alpha^3\}, \ldots,$ nabývá pouze konečně mnoha hodnot, přičemž $\{x\}$ značí takové číslo z intervalu $\langle 0, 1)$, že $x - \{x\}$ je celé číslo. Dokažte, že potom je α celé číslo.*

Řešení. Nech je počet rôznych hodnôt, ktoré nadobúda postupnosť rovný N. Následne potom existuje iba N^2 možných hodnôt usporiadaných dvojíc $(\{\alpha^i\}, \{\alpha^{i+1}\})$. Z Dirichletovho princípu potom platí, že medzi prvými N^2+1 členmi postupnosti existujú navzájom rôzne k, l také, že $\{\alpha^k\} = \{\alpha^l\}$ a $\{\alpha^{k+1}\} = \{\alpha^{l+1}\}$. Z čoho vyplýva:

$$\alpha^k - \alpha^l = m \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$
$$\alpha^{k+1} - \alpha^{l+1} = m \cdot \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Teda α musí byť racionálne. Následne nech $\alpha = \frac{p}{q}$, kde p, q sú navzájom nesúdeliteľné nenulové celé čísla (prípad $\alpha = 0$ je triviálny). Dosadením do rovnice (1) dostávame:

$$\frac{p^k - q^{k-l}p^l}{q^k} \in \mathbb{Z}.$$

Zrejme zlomok je v základnom tvare keďže čitateľ a menovateľ sú vzájomne nesúdeliteľný, čo nám už dáva, že $q = 1$ na to, aby zlomok bol celočíselný. Teda $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Poznámky opravujúciho. Kľúčové bolo pracovať s faktom, že postupnosť má konečný počet hodnôt. Následne väčšina správnych riešení využilo tento fakt a našla si vhodnú nekonečnú podpostupnosť, o ktorej ukázali, že jej členy sú buď mocniny nejakého racionálneho čísla, alebo že členy v nej sú všetky po 2 rôzne. *(Adam „Džavo“ Džavoronok)*

Úloha N1. *Řekněme, že kladné celé číslo n je žirafa, pokud platí, že každé celé číslo $1 \leq x \leq n$ lze vyjádřit jako součet navzájem různých kladných dělitelů n. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho žiraf tvaru $a^2 + a + 42$ pro přirozené a.*

Řešení. Nejprve si uvědomme, že pokud je číslo $ž$ žirafa, pak umíme jako součet jejích dělitelů vyjádřit všechna přirozená čísla menší než $2ž$. Z definice to umíme pro přirozená čísla menší než $ž$ (pro $ž$ zřejmě také), ta navíc v takovémto vyjádření nebudou obsahovat dělitel $ž$. Libovolné přirozené číslo $ž < k < 2ž$ můžeme napsat jako $ž + \ell$ pro $\ell < ž$, tedy ho můžeme vyjádřit jako součet dělitelů $ž$ stejně jako ℓ a přidat dělitel $ž$.

Lemma 1. *Pro žirafu $ž$ a přirozené číslo $n < 2ž$ je číslo $nž$ žirafa.*

Důkaz. Jelikož je číslo n menší než $2ž$, umíme ho z prvotního pozorování vyjádřit jakou součet dělitelů žirafy $ž$. Libovolné přirozené číslo menší než $nž$ můžeme vyjádřit jako $rn+s$ pro přirozené čísla $r < ž$, $s < n$. Čísla r, s tedy umíme vyjádřit jako součet dělitelů žirafy $ž$, takovýto dělitel vynásobený číslem n bude dělitelem čísla $nž$, proto lze rn vyjádřit jako součet dělitelů čísla $nž$. Takto můžeme spojit vyjádření rn a s (dělitelé žirafy $ž$ jsou i děliteli čísla $nž$) do validního vyjádření pro $rn + s$, jen musíme říci, že využití dělitelé jsou všichni různí. To ale zřejmě jsou, jelikož vyjádření r i s byla validní a dělitelé ve vyjádření rn jsou jako násobky n větší nebo rovny n, zatímco dělitelé ve vyjádření $s < n$ jsou ostře menší než n. Takto umíme vyjádřit jako součet dělitelů čísla $nž$ všechna čísla menší než $nž$. Číslo $nž$ je samo svým dělitelem, dohromady je tedy skutečně žirafou. □

O čísle řekneme, že je *kvadratické*, pokud lze vyjádřit jako $a^2 + a + 42$ pro přirozené číslo a. Nyní ukážeme, že pokud $ž = m^2 + m + 42$ je kvadratická žirafa, pak i číslo $(ž+m)^2 + (ž+m) + 42$ je kvadratická žirafa. Tento výraz je po roznásobení roven

$$ž^2 + 2žm + ž + m^2 + m + 42 = ž^2 + 2žm + 2ž = ž(ž + 2m + 2).$$

Z Lemmatu 1 plyne, že pokud platí

$$ž + 2m + 2 < 2ž,$$

pak je i tento výraz žirafa. To je ale zřejmé, jelikož úpravou této nerovnosti získáme

$$0 < m^2 - m + 40,$$

což pro přirozená čísla m vždy platí ($m^2 \geq m$).

To tedy znamená, že z kvadratické žirafy $ž = m^2 + m + 42$ umíme vyrobit větší žirafu $(ž + m)^2 + (ž + m) + 42 = ž(ž + 2m + 2)$, která je taktéž kvadratická. Pak nám ale stačí nalézt jednu kvadratickou žirafu, jelikož z ní umíme vytvořit nekonečně mnoho dalších. Nejprve číslo 6 je žirafa, jelikož

$$1 = 1, \qquad 2 = 2, \qquad 3 = 3, \qquad 4 = 1 + 3, \qquad 5 = 2 + 3, \qquad 6 = 6$$

a $1, 2, 3, 6$ jsou dělitelé 6. Kvadratické číslo $48 = 2^2 + 2 + 42$ je pak žirafou opět díky Lemmatu 1, jelikož $48 = 6 \cdot 8$ a $8 < 2 \cdot 6$. Tím je úloha vyřešena.

Poznámky opravujícího. K úloze šlo přistupovat s obměnami dvěma různými přístupy. Kromě toho ze vzorového řešení se šlo zaměřit na násobky mocnin 2.

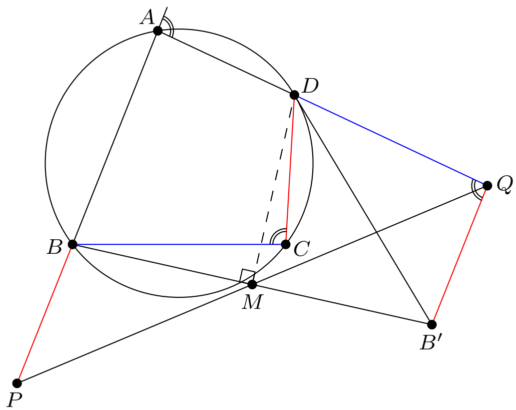
(Michal Janík)

Úloha G1. *Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Na polopřímkách opačných k polopřímkám BA a DA zvolíme postupně body P a Q tak, aby platilo $|CD| = |BP|$, $|BC| = |DQ|$. Označme střed PQ jako M. Dokažte, že $|\sphericalangle BMD| = 90°$.*

Řešení. Nech B' je obrazom bodu B v stredovej súmernosti so stredom M. Keďže M je stredom úsečiek PQ a BB', $BPB'Q$ je rovnobežník. Z toho vyplýva, že priamky BP a QB' sú rovnobežné a $|BP| = |QB'|$.

Dokážeme, že trojuholníky BCD a $B'QD$ sú zhodné podľa vety *sus*. Už vieme že $|CD| = |BP| = |QB'|$. Zo zadania $|CB| = |QD|$. Využívajúc tetivovosť štvoruholníka $ABCD$ a rovnobežnosť priamok $\overline{ABP}$ a QB' dostaneme $|\sphericalangle BCD| = 180° - |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DQB'|$.

Z toho nám vyplýva $|BD| = |B'D|$, čiže trojuholník BDB' je rovnoramenný. V ňom je bod M stred základne, ale potom MD je os strany BB'. Odtiaľ už dostávame hľadané $|\sphericalangle BMD| = 90°$.



Poznámky opravujícího. Kľúčom k riešeniu bolo využiť rovnosti dĺžok a stred strany na získanie jedného alebo viacerch rovnobežníkov, čo sa väčšine riešiteľov podarilo. *(Roland Vízner)*