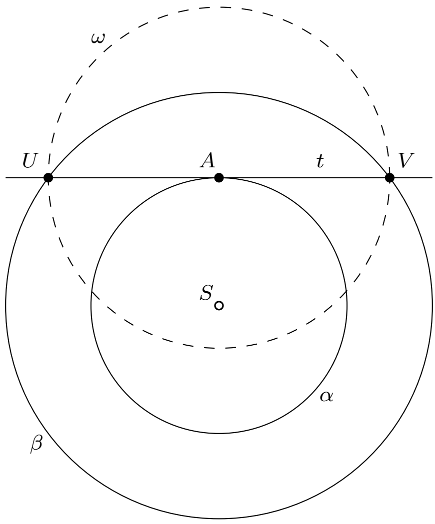
Řešení 5. série

Úloha C5. *Je dán jednotkový kruh se středem S a přirozené číslo n. Kuba do kruhu (včetně jeho ohraničující kružnice) nakreslí n úseček tak, aby pro libovolnou kružnici se středem S platilo, že nanejvýš jednu z Kubových úseček protíná[1] v jejím vnitřním bodě. Určete maximální součet délek úseček, kterého Kuba může dosáhnout.*

Řešení. Uvažujme mezikruží mezi kružnicemi α, β se společným středem v S a poloměry $a < b$. Jakou nejdelší úsečku v něm můžeme nakreslit? Pokud některý krajní bod neleží na α ani β, pak můžeme úsečku prodloužit. Pokud by oba krajní body ležely na β a úsečka neměla společný bod s α, pak bychom ji mohli posunout blíž k S a prodloužit. Zvolme tedy bod A na kružnici α, který na úsečce bude ležet, a nechť je t tečna k α v bodě A. BÚNO nechť je t vodorovná a střed S leží pod ní. Dále nechť jsou U, V průsečíky t s β a ω kružnice nad průměrem UV. Kdyby uvažovaná úsečka obsahovala nějaký bod pod t, pak by jeho spojnice s A procházela vnitřkem α, což nelze, takže úsečka musí celá ležet v horní úseči určené kružnicí β a přímkou t. Dvě kružnice se protínají v nejvýše dvou bodech, takže kružnice ω a β nemají další průsečíky kromě U, V. V polorovině pod t prochází ω vnitřkem β, takže v polorovině nad t musí procházet vnějškem β. Z toho už plyne, že celá úseč nad t je obsažena uvnitř ω, takže uvažovaná úsečka leží celá v ω. Přitom ale nejdelší úsečka uvnitř kružnice je její průměr. Průměr UV zároveň leží v mezikruží mezi α a β, takže maximální délka úsečky v tomto mezikruží je $|UV| = 2|AU| = 2\sqrt{|SU|^2 - |SA|^2} = 2\sqrt{b^2 - a^2}$.



Uvažujme nyní n úseček v jednotkové kružnici. Každá obývá nějaké mezikruží, přitom můžeme předpokládat, že tato mezikruží těsně přiléhají na sebe i na okraj (resp. střed) jednotkové kružnice (jinak bychom mohli některé úsečky prodloužit bez porušení zadání). Máme tedy nějaká

$$0 = r_0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_{n-1} \leq r_n = 1$$

[1] Pod pojmem „protíná“ míníme, že nějaký vnitřní bod dané úsečky zároveň leží na dané kružnici.

taková, že i-tá úsečka obývá mezikruží určené kružnicemi s poloměry r_{i-1}, r_i. Celkový součet L těchto délek je potom nanejvýš

$$L = 2 \cdot \left(\sqrt{r_1^2 - r_0^2} + \sqrt{r_2^2 - r_1^2} + \cdots + \sqrt{r_n^2 - r_{n-1}^2} \right).$$

Použitím KA nerovnosti[2] pak máme

$$\frac{L}{2n} = \frac{\sqrt{r_1^2 - r_0^2} + \sqrt{r_2^2 - r_1^2} + \cdots + \sqrt{r_n^2 - r_{n-1}^2}}{n} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{(r_1^2 - r_0^2) + (r_2^2 - r_1^2) + \cdots + (r_n^2 - r_{n-1}^2)}{n}} = \sqrt{\frac{r_n^2 - r_0^2}{n}} = \sqrt{\frac{1^2 - 0^2}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$L \le 2\sqrt{n}.$$

Zároveň dovedeme dosáhnout $L = 2\sqrt{n}$. V KA nerovnosti nastane rovnost právě tehdy, když $\sqrt{r_1^2 - r_0^2} = \cdots = \sqrt{r_n^2 - r_{n-1}^2}$, což snadno docílíme vzetím $r_i = \sqrt{\frac{i}{n}}$. Pak už v každém mezikruží dovedeme zvolit nejdelší úsečku s délkou $2\sqrt{\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$, což skutečně docílí součtu $L = 2\sqrt{n}$, který je tím pádem maximální.

Poznámky opravujícího. Mnoho řešitelů jenom prohlásilo za zjevné, že nejdelší úsečka v mezikruží je tečna k menší kružnici. Zvažoval jsem, zda za to strhávat body, leč nakonec jsem tak neučinil. Přesto bych alespoň zde rád pochválil ty řešitele, kteří si dali záležet a korektně to dokázali. *(Matěj Doležálek)*

Úloha G5. *V trojúhelníku ABC se kružnice vepsaná dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Nechť je X průsečík kolmice k BC procházející bodem D a přímky EF. Dále budiž Y průsečík přímky BC a osy úhlu BAC. Dokažte, že $AD \parallel XY$.*

Řešení. Označme I střed kružnice vepsané, G průsečík AI s EF a $H \neq D$ druhý průsečík AD s kružnicí vepsanou. Pak protože $YG = IG \perp GX$ a $XY = ID \perp DY$, leží $GXYD$ na jedné kružnici nad průměrem XY. Uvažme inverzi φ podle kružnice vepsané, potom platí $\varphi(G) = A$, $\varphi(H) = H$ a $\varphi(D) = D$, takže

$$|\sphericalangle IDA| \stackrel{\varphi}{=} |\sphericalangle IGD| = |\sphericalangle IXY|,$$

tedy $XY \parallel AD$.

Řešení bez inverze. Použijeme stejné značení bodů jako v předchozím řešení. Díky $|\sphericalangle IGX| = |\sphericalangle IDY|$ a $|\sphericalangle GIX| = |\sphericalangle DIY|$ jsou trojúhelníky IGX a IDY podobné, tedy

$$\frac{|ID|}{|IG|} = \frac{|IY|}{|IX|} \quad \Longrightarrow \quad |IY| = \frac{|ID|\,|IX|}{|IG|}.$$

Z Eukleidovy věty o odvěsně v $\triangle AFI$ platí

$$|IF|^2 = |IG|\,|IA| \quad \Longrightarrow \quad |IA| = \frac{|IF|^2}{|IG|}.$$

Z toho použitím $|IF| = |ID|$ plyne

$$\frac{|IA|}{|IY|} = \frac{\frac{|ID|^2}{|IG|}}{\frac{|ID|\,|IX|}{|IG|}} = \frac{|ID|}{|IX|},$$

[2] Neboli nerovnosti kvadratického a aritmetického průměru.

takže stejnolehlost s koeficientem $-\frac{|ID|}{|IX|}$ zobrazí $X \mapsto D$ a $Y \mapsto A$, tedy $XY \parallel AD$.

Poznámky opravujícího. Většina řešení se vydala cestou *řešení bez inverze* a byla až na pár překlepů bezchybná. *(Radek Olšák)*

Úloha A5. *Uvažujme reálné polynomy dvou proměnných P, které splňují $P(x, y) > 0$ pro každá $x, y \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali každý takový polynom P lze vyjádřit jako*

$$P = Q_1^2 + Q_2^2 + \cdots + Q_n^2$$

pro nějaké přirozené n a reálné polynomy dvou proměnných $Q_1, \ldots, Q_n$.

Řešení. Ukážeme, že dané tvrzení neplatí pro polynom

$$P(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 + 2 - 3x^2y^2.$$

Nejprve dokážeme, že tento polynom nabývá jen kladných hodnot, to snadno plyne z AG nerovnosti skrze

$$x^4y^2 + x^2y^4 + 1 \geq 3x^2y^2.$$

Teď ještě potřebujeme dokázat, že P nelze zapsat jako součet čtverců polynomů. P je stupně 6, takže všechny polynomy Q_i musí být stupně nejvýše 3. Kdyby některé polynomy byly vyššího stupně, člen s nejvyšším stupněm (pokud má více členů stejný stupeň, uvážíme z nich ten s největším stupněm v x) je vždy nezáporný a nemůže se odečíst.

Nyní si všimněme, že

$$P(x, 0) = P(0, y) = 2,$$

takže Q_i nemohou obsahovat členy x^k ani y^k (ten největší by se opět neodečetl). Všechna Q_i tedy jsou tvaru

$$Q_i(x, y) = a_ix^2y + b_ixy^2 + c_ixy + d_i.$$

Teď uvažme člen $-3x^2y^2$, jediné členy, které k němu přispívají jsou tvaru $(c_ixy)^2$. To je ovšem spor, protože -3 nemůžeme dostat jako součet čtverců. *(Pepa Minařík)*

Úloha N5. *Neuspořádanou trojici přirozených čísel $\{a, b, c\}$ nazvěme* pythagorejskou, *pokud existuje pravoúhlý trojúhelník s délkami stran a, b, c. Dokažte, že pro libovolné dvě pythagorejské trojice Q, R existuje konečná posloupnost $P_1, P_2, \ldots, P_m$ pythagorejských trojic taková, že $P_1 = Q$, $P_m = R$ a pro každé $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ mají P_i a P_{i+1} nějaký společný prvek.*

Řešení. Řekněme, že pythagorejská trojice Q *je propojena* s pythagorejskou trojicí R, pokud existuje posloupnost $P_1, \ldots, P_m$ popsaná v zadání, a tuto skutečnost značme $Q \to R$. Tento vztah je symetrický, jelikož k dosvědčení $R \to Q$ prostě můžeme vzít příslušnou posloupnost trojic v opačném pořadí. Ukážeme, že každá pythagorejská trojice je propojena $\{3, 4, 5\}$, z čehož už poplyne, že všechny trojice jsou propojeny navzájem.

Řekněme, že přirozené číslo k je *šplhací*, pokud $\{3, 4, 5\} \to \{3k, 4k, 5k\}$, a množinu všech šplhacích čísel označme S. Postupně ukážeme $S = \mathbb{N}$. Triviálně platí $1 \in S$ a skrze

$$\{3, 4, 5\} \to \{5, 12, 13\} \to \{9, 12, 15\} \to \{15, 20, 25\} \to \{7, 24, 25\} \to \{10, 24, 26\} \to \{6, 8, 10\}$$

máme i $2 \in S$. Dále nahlédněme, že S je uzavřená na násobení. Pokud jsou k, ℓ šplhací čísla, pak můžeme v posloupnosti spojující $\{3, 4, 5\} \to \{3\ell, 4\ell, 5\ell\}$ přenásobit všechna čísla v každé trojici číslem k, čímž dostaneme zase pythagorejské trojice dosvědčující $\{3k, 4k, 5k\} \to \{3k\ell, 4k\ell, 5k\ell\}$. Dohromady tak

$$\{3, 4, 5\} \to \{3k, 4k, 5k\} \to \{3k\ell, 4k\ell, 5k\ell\},$$

tedy $k\ell \in S$.

Stačí se tedy dívat, která prvočísla jsou šplhací. Už máme $2 \in S$, dále postupujme silnou indukcí. Nechť je p liché prvočíslo a předpokládejme, že všechna menší prvočísla jsou šplhací. Podívejme se na pythagorejskou trojici $\{4p,\ 2p^2-2,\ 2p^2+2\}$. Platí

$$2p^2-2 = 2\cdot(p-1)(p+1) = 4\cdot(p-1)\cdot\frac{p+1}{2}.$$

V posledním součinu jsou $p-1$ i $\frac{p+1}{2}$ přirozená čísla menší než p. Všichni jejich prvočíselní dělitelé jsou tak menší než p, z indukčního předpokladu jsou tedy šplhací. Máme tak $\frac{1}{2}(p-1)(p+1) \in S$, z čehož

$$\{3,4,5\} \to \left\{3\cdot\frac{1}{2}(p-1)(p+1),\ 4\cdot\frac{1}{2}(p-1)(p+1),\ 5\cdot\frac{1}{2}(p-1)(p+1)\right\} =$$
$$= \left\{\frac{3}{2}(p^2-1),\ 2p^2-2,\ \frac{5}{2}(p^2-1)\right\} \to \{4p,\ 2p^2-2,\ 2p^2+2\} \to \{3p,4p,5p\},$$

což značí $p \in S$. Tím je dokončen indukční krok, takže všechna prvočísla jsou šplhací a $S = \mathbb{N}$, jak jsme chtěli.

Nyní už stačí dokázat, že každá pythagorejská trojice $\{a,b,c\}$ je propojena s nějakou trojicí $\{3k,4k,5k\}$, načež dostaneme $\{3,4,5\} \to \{3k,4k,5k\} \to \{a,b,c\}$. K tomu stačí, aby jedno z a, b, c bylo násobkem tří. To je však zjevné díky kvadratickým zbytkům modulo 3. Kdyby ani jedno z a, b, c nebylo násobkem tří, pak jejich čtverce dávají zbytek 1 modulo 3, takže z rovnice $a^2+b^2=c^2$ plyne $2 \equiv 1 \pmod 3$, což je spor. V každé pythagorejské trojici je tedy násobek tří, pročež je tato trojice propojena s příslušným $\{3k,4k,5k\}$, jak jsme chtěli.

Poznámky opravujícího. K této úloze přišlo jediné řešení. Bylo správně a postupovalo podobně jako vzorák. *(Matěj Doležálek)*