



Úloha 1. Uvnitř čtverce $ABCD$ leží bod P tak, že platí $|AP| = |AB|$ a $\angle CPD = 90^\circ$. Dokažte, že $|DP| = 2|CP|$

Řešení. Podle zadání platí $|AP| = |AD|$, trojúhelník DAP je tedy rovnoramenný. Označme M střed DP . Zřejmě $\angle DMA = \angle CPD = 90^\circ$. Dále pak $\angle ADM = 90^\circ - \angle PDC = \angle DCP$ a $|AD| = |CD|$. Trojúhelníky ADM a DCP jsou proto shodné podle věty usu. Hotovo, neboť $|DP| = 2|DM| = 2|CP|$.

□

Úloha 2. Je dán konečný graf. Dokažte, že lze jeho vrcholy rozdělit do dvou množin tak, aby více než polovina hran vedla mezi vrcholy z různých skupin.

Řešení. U každého vrcholu si hodíme spravedlivou mincí, zda vrchol dáme do první, nebo do druhé skupiny. Střední hodnota počtu hran, které povedou napříč skupinami, je součet přes hrany z pravděpodobnosti, že právě příslušná hrana povede napříč, což je zřejmě polovina Dohromady tedy vyšla přesně polovina počtu hran. Jistě ale existuje rozdělení (s kladnou pravděpodobností), v němž nevede napříč žádná hrana, například pokud je jedna z množin prázdná. Proto musí existovat rozdělení, v němž napříč vede ostře více než polovina hran.

□

Úloha 3. Nech $a, b, c > 0$ reálné, že $abc = 1$. Dokažte

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

Řešení. Spácháme standardní substitúciu $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$. Dostaneme tak

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leq xyz$$

Nanajvýš jeden z činitelů může být záporný a vtedy sme vyhrali. Inak

$$x \geq \sqrt{(x - y + z)(y - z + x)}.$$

□

Úloha 4. Čtyřúhelník $ABCD$ splňuje $\angle ABC = \angle BCD$, $\angle CDA = 90^\circ$, $|AB| = 2|CD|$. Dokažte, že osa úhlu $\angle ACB$ je kolmá na CD .

Řešení. Označme M střed AB , K obraz C podle D . Čtyřúhelníky $ABCK$ a $MBCD$ jsou oba rovnoramenné lichoběžníky. Označme S_C C-Švrčkův bod trojúhelníku ABC . Potom body A, S_C, B, C, K leží na jedné kružnici. Ze symetrie plyne $\angle BMK = \angle CDA = 90^\circ$. Z toho dostáváme, že body K, M, S_C leží na ose strany AB . Navíc, K je C -antišvrk trojúhelníku ABC . Proto je $S_C K$ průměrem kružnice opsané trojúhelníku ABC . Z toho už zřejmě $\angle S_C C K = 90$, jak jsme chtěli dokázat. \square

Úloha 5. *Nájdite všechny kladné celé čísla $n < 10^{100}$, pro které platí, že n dělí 2^n , $n - 1$ dělí $2^n - 1$ a $n - 2$ dělí $2^n - 2$*

Řešení. Máme $n|2^n$, ak a len ak $n = 2^k$, takže nastavíme $n = 2^k$. Máme $2^k - 1|2^{2^k} - 1$, ak a len ak $k|2^k$ (vzhľadom na dobre známy fakt, že $2^a - 1|2^b - 1$, ak a len ak $a|b$), takže nastavíme $k = 2^j, n = 2^{2^j}$. Máme $2^{2^j} - 2|2^{2^{2^j}} - 2 \iff 2^{2^j - 1} - 1|2^{2^{2^j} - 1} - 1 \iff 2^j - 1|2^{2^j} - 1 \iff j|2^j$, čo je ekvivalentné $j = 2^l$. Preto n funguje, ak $n = 2^{2^{2^l}}$, takže po troche úvah dostaneme odpoveď $n = 2^2, 2^4, 2^{16}, 2^{256}$. \square