Zadání 2. série

Termín odeslání: 23. júna 2025

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Email pro dotazy: `info@iksko.org`

Úloha N2. Lucka má na tabuli n po sebe idúcich čísel a má n štítkov s nápisom: „Toto číslo nie je deliteľné číslom i.“, pre $i \in \{2, 3, \ldots, n+1\}$. Každý štítok umiestni vedľa čísla na tabuli tak, aby každé číslo malo presne jeden štítok. Za správne umiestnený štítok dostane Lucka cukrík. Koľko najviac cukríkov môže Lucka zaručene získať bez ohľadu na čísla napísané na tabuli?

Úloha G2. V ostrouhlom rôznostrannom trojuholníku ABC pretína os vnútorného uhla BAC stranu BC v bode E a kratší oblúk BC kružnice jemu opísanej v bode M. Uvážme bod D na kratšom oblúku BC kružnice opísanej trojuholníku ABC taký, že $|ED| = |EM|$. Nech $P \neq A$ je bod na úsečke AD taký, že $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle ACP|$. Následne nech O je stred kružnice opísanej trojuholníka ABC. Dokážte, že $OP \perp AM$.

Úloha C2. Majme $n \geq 2$ daných bodov v rovine $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a nech $r > 0$ je reálne číslo. Krivoš a Dominik hrajú nasledujúcu hru. Najprv Krivoš zostrojí súvislý graf s vrcholmi v bodoch $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Potom priradí každému vrcholu X_i nezáporné reálne číslo r_i, pre $i = 1, \ldots, n$, aby platilo $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$.Následne Dominik vyberie postupnosť $k+1$ navzájom rôznych vrcholov $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_{k+1}}$, že $X_{i_1} = X_1$ a pre každé $j = 1, 2, \ldots, k$ sú X_{i_j} a $X_{i_{j+1}}$ spojené hranou.[1] Dominik vyhrá, ak platí

$$\frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} r_{i_j} \geq r,$$

v opačnom prípade vyhráva Krivoš. V závislosti od n určte najväčšiu možnú hodnotu r, pre ktorú má Dominik víťaznú stratégiu.

Úloha A2. David mal dnes naozaj dobrý deň. Preto si na vyváženie svojho dňa vybral klesajúcu funkciu $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktorá nadobúda všetky kladné reálne hodnoty, a kladné čísla $a_1 \neq b_1$. Čísla a_2, b_2, a_3, b_3, … spĺňajú

$$a_{n+1} = a_n + f(b_n), \qquad b_{n+1} = b_n + f(a_n)$$

pre každé $n \geq 1$. Ukážte, že existuje prirodzené číslo m také, že $|a_m - b_m| > 2^{2025}$.

[1] Dĺžka $k \geq 1$ nie je pevne daná ale prvý zvolený vrchol musí byť vždy X_1.