Riešenia 3. série

Úloha A3. *Nájdite všetky dvojice funkcií $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:*

$$f(x) + f(y) + f(x)f(y) = g(x)g(y)$$

Riešenie. Najprv ukážeme, že f musí byť konštantná funkcia. Zadefinujme funkciu h nasledovne: $h(x) = f(x) + 1$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Substitúciou funkcie f funkciou h, dostávame: pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$h(x)h(y) - 1 = g(x)g(y) \qquad (1)$$

špeciálne pre $y = x$ dostávame: pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$h(x)^2 - 1 = g(x)^2$$

z toho výplýva, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$(h(x)^2 - 1)(h(y)^2 - 1) = (g(x)g(y))^2 = (h(x)h(y) - 1)^2$$

druhú rovnosť sme dostali umocnením rovnosti (1) na druhú. Po roznásobení a prehodení všetkých členov na jednu stranu, dostaneme:

$$0 = h(x)^2 - 2h(x)h(y) + h(y)^2 = (h(x) - h(y))^2$$

čo implikuje $h(x) = h(y)$, a keďže to platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$, tak h je konštantná, čiže aj f je konštantná, t.j. existuje také $c \in \mathbb{R}$, že $f(x) = c$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Dosadením do zadania a položením $y = x$, dostaneme:

$$c(c + 2) = 2c + c^2 = g(x)^2 \geq 0$$

z toho vidno, že $c \leq -2$ alebo $c \geq 0$ a ďalej, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí: $g(x) = \sqrt{c^2 + 2c}$ alebo $g(x) = -\sqrt{c^2 + 2c}$ (pozor! to platí pre každé x osobitne, napr. sa zatial nevylúčila možnosť, že $g(20) = \sqrt{c^2 + 2c}$ a zároveň $g(14) = -\sqrt{c^2 + 2c}$). Ak $c^2 + 2c = 0$ tak g je zjavne konštantná nula. V prípade, že $c^2 + 2c > 0$ máme $g(2014) \neq 0$, dosadíme do zadania $x = 2014$ (prečo práve 2014?) a dostaneme: pre všetky $y \in \mathbb{R}$ platí:

$$2c + c^2 = g(2014)g(y)$$

keďže $g(2014) \neq 0$, tak g musí byť konštantná funkcia. Takže g je konštantne $\sqrt{c^2 + 2c}$ alebo konštantne $-\sqrt{c^2 + 2c}$. Skúška sa ľahko overí.

Všetky riešenia funkcionálnej rovnice sú také f, g, pre ktoré existuje $c \in (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$, také, že $f(x) = c$ a $g(x) = \sqrt{c^2 + 2c}$ alebo $f(x) = c$ a $g(x) = -\sqrt{c^2 + 2c}$, pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

(Ľudka Šimková a Viktor Lukáček)

Úloha G3. *Je daný 5-uholník $ABCDE$, v ktorom platí, že obsahy trojuholníkov ABC, BCD, CDE, DEA, EAB sú rovnaké. Dokážte, že vnútri 5-uholníka existuje bod P taký, že obsahy trojuholníkov ABP, BCP, CDP, DEP, EAP sú rovnaké.*

Len tak mimochodom. Vieme, že si myslíte, že vedúci iKS sú dokonalí. No predsa aj my sme len ľudia a tak sa stalo, že sme do zadania zabudli dopísať, že päťuholník má byť *konvexný*. Pre nekonvexný päťuholník totiž tvrdenie *neplatí*. Protipríklad si nájdite sami. Bodovali sme to (a aj to tak vyriešime), ako by v zadaní slovo konvexný bolo. Tí, čo si uvedomili, že pre nekonvexné to neplatí, boli odmenení bodom navyše.

Riešenie. Všimnime si, že $\triangle ABE$ a $\triangle ABC$ majú rovnaký obsah a zároveň spoločnú stranu AB. To ale znamená, že výška na túto stranu v oboch trojuholníkoch musí byť rovnako dlhá a teda $AB||EC$. Zopakovaním tejto úvahy pre každú stranu trojuholníka získame

$$AB||EC, BC||AD, ..., EA||DB$$

Označme si X, Y, Z postupne prieniky AD s BE, AC s BE a BD s CE. Ukážeme, že stred úsečky CD, stred úsečky BE, bod A a bod Z ležia na jednej priamke. Kvôli rovnobežnosti strán a uhlopriečok sú $BCDX$ a $CDEY$ rovnobežníky, v ktorých sú protiľahlé strany rovnako dlhé:

$$|BX| = |CD| = |EY| \quad \Rightarrow \quad |EX| = |BY| \quad \Rightarrow \quad S_{BE} = S_{XY}$$

Všimnime si, že úsečka XY sa zobrazí na úsečku DC v rovnoľahlosti so stredom v bode A. Takisto aj úsečka EB sa zobrazí na úsečku CD v rovnoľahlosti so stredom v bode Z. Z prvej rovnoľahlosti získame kolinearitu A, S_{XY}, S_{CD}, z druhej kolinearitu Z, S_{XY}, S_{CD}.

Teraz ukážeme, že na spojnici týchto štyroch bodov leží aj ťažisko sústavy, v ktorej každý vrchol päťuholníka reprezentuje hmotný bod s váhou 1. Ťažisko bodov C, D je v S_{CD}, rovnako ťažisko bodov B, E je v S_{BE}. Ťažisko celej sústavy preto nájdeme ako ťažisko bodov S_{CD}, S_{BE}, A s nejakými váhami. Všetky tieto body ležia na priamke, preto naše hľadané ťažisko na nej bude ležať tiež (a zároveň bude medzi A a S_{CD}, tzn. vo vnútri päťuholníka). Označme ho P.

Cyklicky teda platí, že spojnice stredov strán s protiľahlými vrchlomi sa pretínaju v bode P. Zároveň v rovnobežníku $ABZE$ vidíme, že bod P leží na jeho uhlopriečke AZ. Triviálne už $S_{\triangle EPA} = S_{\triangle APB}$ a rovnako aj cyklicky pre ďalšie trojuholníky určené stranou a bodom P. A tým sme ukázali, že bod P vyhovujúci zadaniu naozaj existuje.

Podľa Eduarda Batmendijna:

Nech každý z vrcholov päťuholníka má hmotnosť 1. Ťažisko sústavy týchto piatich hmotných bodov označme P. V ľubovoľnej karteziánskej sústave, ktorú by sme zaviedli v našej rovine, musí platiť, že $P = \frac{A+B+C+D+E}{5}$. Dokážeme si, že obsah trojuholníka ABP je pätina obsahu celého päťuholníka:

Obsah päťuholníka môžeme vyjadriť ako

$$S_{ABCDE} = S_{ABD} + S_{BCD} + S_{ADE} = S_{ABD} + S_{ABC} + S_{ABE},$$

lebo je konvexný. To vieme zapísať ako

$$S_{ABCDE} = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v_B + v_C + v_D),$$

kde v_X je výška bodu X vzhľadom na AB. Vezmime si karteziánsku súradnicovú sústavu, kde AB leží na x-ovej osi, potom výška ľubovoľného bodu vzhľadom na AB je ekvivalentná jeho y-ovej súradnici (resp. jej absolútnej hodnote, ale keďže predpokladáme konvexnosť päťuholníka, tak všetky zaujímavé body budú v jednej polrovine vzhľadom na AB, BUNV nech je to tá s kladnými súradnicami). Keďže P je priemerom A, B, C, D, E, musí platiť:

$$v_P = \frac{v_A + v_B + v_C + v_D + v_E}{5} = \frac{v_C + v_D + v_E}{5}.$$

Preto obsah trojuholníka ABP je $S_{ABP} = \frac{1}{2}|AB| \cdot v_P = \frac{S_{ABCDE}}{5}$.

Analogicky to bude platiť pre obsahy BCP, CDP, DEP aj EAP, teda obsahy všetkých týchto trojuholníkov sú rovnaké.

(Marko Puza)

Úloha N3. *Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel (m, n) také, že platí:*

$$m^6 = n^{n+1} + n - 1$$

Riešenie. Máme vyriešiť nejakú rovnicu v prirodzených číslach. Na začiatku môžeme skúsiť uhádnuť nejaké riešenia. Očívidne ak $n = 1$, tak nutne $m = 1$, čo je riešenie. No keď skúšame ďalej, akosi sa nám už ďalšie riešenia nedarí nájsť. Vtedy sa treba pokúsiť ukázať, že už ďalšie nie sú.

Ako na to? No prvá vec ja pozrieť sa a možno nám niečo podozrvié udrie do očí :) Napríklad m^6 je štvorec. Keby aj n^{n+1} bol štvorec tak máme dva štvorce "blízko seba". Inak povedané ak je $n+1$ párne mohlo by platiť $(n^{\frac{n+1}{2}})^2 < n^{n+1}+n-1 < (n^{\frac{n+1}{2}}+1)^2$ Prvá nerovnosť triviálne platí, ak $n > 1$ a tá druhá zjavne dokonca pre ľubovoľné prirodzené n. No to je spor, lebo m^6 je medzi 2 po sebe idúcimi štvorcami.

Tak isto m^6 je tretia mocnina. Keby n^{n+1} bola tretia mocnina, tak opäť (pre $n > 1$) platí $(n^{\frac{n+1}{3}})^3 < n^{n+1}+n-1 < (n^{\frac{n+1}{3}}+1)^3$, čo je opäť spor.

Keď to dáme dokopy dostaneme, že $n \equiv 0$ alebo $n \equiv 4 \pmod 6$

Teraz môžeme skúsiť trápne zvyškovanie a všimnúť si, že ak $n \equiv 0 \pmod 6$, tak $n^{n+1}+n-1 \equiv -1 \pmod 6$, no druhá mocnina (a teda ani šiesta) nikdy nedáva zvyšok -1 po delení 6. Je to preto lebo nedáva nikdy zvyšok -1 po delení 3.

Pre tých, ktorí čakali vzorák, ktorý pochopia aj na základnej škole je čas aby prestali čítať a uverili, že pre zvyšok 4 po delení 6 sa to už nejako dorazí. Pre tých, ktorých to neodradilo ideme na to :D.

Ako sme už videli, často sa oplatí dívať na to či druhá mocnina môže alebo nemôže dávať nejaký zvyšok po delení nejakým číslom, teda na kvadratické zvyšky. No žiadne konkrétne číslo po ktorom by to dalo niečo pekné sa nám nedarí nájsť. Vtedy môžeme zobrať niečo čo súvisí s n. Napríklad neľa jakého deliteľa n. Urobíme troška fintu a nezoberieme delite$n$, ale $n+1$. Keďže $n+1$ je nepárne, tak $m^6 = n^{n+1}+n-1 \equiv -1^{n+1}-1-1 \equiv -3 \pmod{n+1}$.

Keď uvažujeme kvadratické zvyšky, čatso je dobré zobrať to modulo nejaké prvočíslo. A keďže $n+1 \equiv 5 \pmod 6$ tak isto má prvočíselného deliteľa p, pre ktorého platí $p \equiv 5 \pmod 6$. (keby malo samých so zvyškom 1 tak dáva zvyšok 1 po delení 6)

Zrejme $m^6 \equiv -3 \pmod p$. Iste by bolo pekné keby -3 nebol kvadratický zvyšok modulo p. No a to nie je :)

Ľahko totiž dostávame

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{3-1}{2}} \left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{p-1} \cdot (-1) = -1$$

.

Pre tých, ktorí nevedia ako sme dostali všetky rovnosti, tak sme využili zákon kvadratickej reciprocity, vzťahy, že $(\frac{a}{p}) = a^{\frac{p-1}{2}}$ pre $a = -1$, $(\frac{ab}{p}) = (\frac{a}{p})(\frac{b}{p})$ a to, že 2 (a teda ani $6k+5$) nie je kvadratický zvyšok po delení 3. [1]

(Martin „Vodka“ Vodička)

Úloha C3. *V rovine je daných konečne veľa pásov*[2] *so súčtom šírok X a kruh s polomerom 1. Dokážte, že ak $X = 7$, tak pásy vieme posunúť tak, aby pokryli celý kruh.*
Bonus: Nájdite, čo najmenšiu hodnotu X pre ktorú to viete dokázať.

Riešenie. Tak poďme to pokryť :). Začneme tak, že zvolíme jeden pás (BUNV zvislý) a posunieme ho tak, aby sa jeho ľavý okraj dotýkal kružnice (a aby ten pokrýval časť kruhu). Zvyšné pásy si zoradíme podľa smeru. Presnejšie podľa veľkosti (najmenšieho) uhla, o ktorý ho musíme otočiť v kladnom smere, tak aby bol rovnobežný zo zvislým pásom. (od najmenšieho uhla k najväčšiemu)

Ešte si zadefinujeme ľavú a pravú priamku pásu. Pri prvom zvislom je to zrejmé. Pri ostaných je ľavá tá, ktorá bude ľavá keď ten pás otočíme (ako pri zoradzovaní), aby bol rovnobežný so zvislým pásom.

[1] Viac o kvadratických zvyškoch môžte nájsť v 1. iks zborníku `http://iksko.org/files/sbornik1.pdf`

[2] pás je časť roviny ohraničená dvoma rovnobežkami

Na začiatku je oblasť, ktorú máme pokryť ohraničená priamkou (pravou priamkou zvislého pásu=PPZP) a časťou kružnice. A teraz ich ukladať zvyšné pásy v poradí ako sme si ich zoradili. Pás vždy priložíme tak, aby sa jeho ľavá priamka dotýkala nepokrytej časti. Môžeme si to predstaviť tak, že pás akoby príde zľava (z jeho pohľadu) a prvýkrát keď na ľavej priamke bude ležať bod nepokrytej časti , tak ho položíme. Tým sme dosiahli to, že naľavo (stále z jeho pohľadu) od pásu nie je nič nepokryté.

A teraz aby sme si situáciu zjednodušili uvažujme ďalej ako nepokrytú oblasť, oblasť ohraničenú PPZP, pravou priamkou pridaného pásu a časťou kružnice (tou, ktorá je nepokrytá). Táto oblasť je zrejme nadmnožina nepokrytej oblasti, teda ak pokryjeme tú, tak aj celý kruh.

V každom ďalšom kroku pridáme pás rovnakým spôsobom, a zase si nepokrytú oblasť zväčšíme, tak aby ju ohraničovali 2 priamky a časť kružnice. Takto pokračujeme a tvrdíme, že pokryjeme celý kruh. [3]

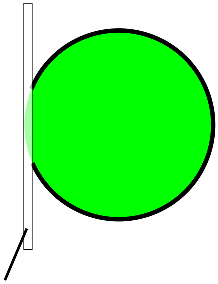
Prečo? No vďaka tomu, že máme pásy zoradené podľa smeru ľavá priamka prikladaného pásu sa bude dotýkať (=mať jeden spoločný bod) nepokrytej časti kružnice. Preto každý pás pokryje nejaký oblúk kružnice, ktorého dĺžka je zrejme väčšia ako šírka pásu. A ak je súčet šírok pásov aspoň 2π tak zrejme časom z kružnice nezostane nič. A zrejme neostala žiadna nepokrytá oblasť (ak áno bola by ohraničená len 2 priamkami, čo nejde). Preto naozaj pokryjeme celý kruh.

Bonus: Uvedomíme si, že takú istu konštrukciu vieme urobiť pre ľubovoľnú krivku (možno je fajn ak je konvexná) a pokryť jej vnútro. My si teda po priložení zvislého pásu okamžite zväčšíme kruh a to tak, že sputíme dotyčnice ku kružnici kolmé na zvislý pás. Dostaneme tak akoby polkruh prilepený na obdĺžnik so stranami 2 a 1. No jeho celú jednu stranu pokrýva zvislý pás a zvyšok jeho obvodu je len $2 + \pi$. Teda úplne rovnakou konštrukciou ho pokryjeme celý (vrátane kruhu). Platí to aj pre $X = 2 + \pi$.

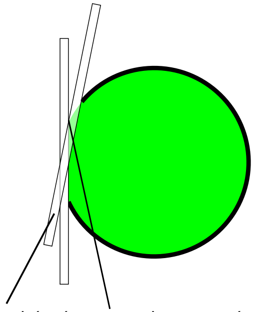
Tento odhad zrejme nie je najlepší, takže ak sa budete vo voľnom čase nudiť vždy sa ho môžte pokúsiť zlepšiť a potom sa nám môžete pochváliť svojim úspechom. :)

(Martin „Vodka“ Vodička a Miro Psota)

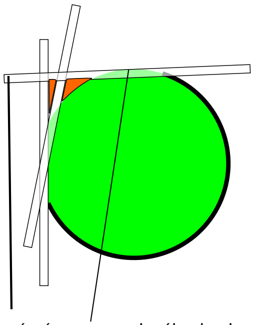
[3] Ak potrebuješ názorný obrázok, je o stránku nižšie.



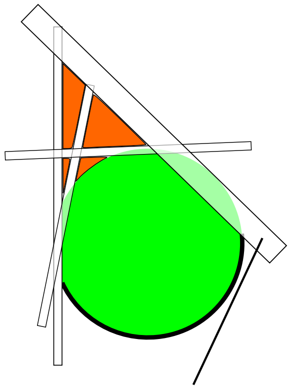
Prvý pás - nech je zvislo
a dotýka sa kruhu.



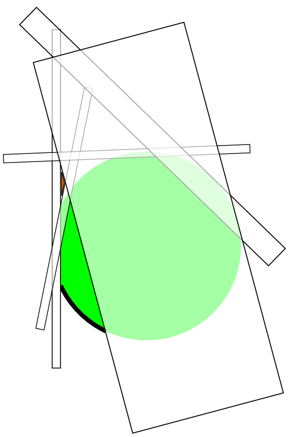
Druhý pás - tu sa hranice pásov pretínajú na
obvode kruhu. Zatiaľ žiadny problém.



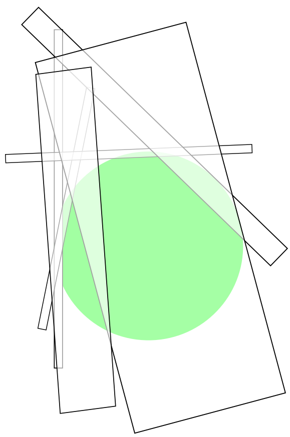
Tretí pás - tu sa dotýka kruhu.
Čo teraz s oranžovou oblasťou? Vyplníme aj tú!



Štvrtý pás.
To že je oranžovej ešte viac nám vôbec nevadí.



Už to vyzerá nádejne.



Hotovo.