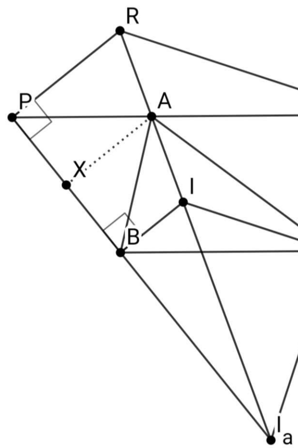
Riešenia 2. série

Úloha G2. *Je daný trojuholník ABC so stredom kružnice vpísanej I. Osi vonkajších uhlov pri vrcholoch B a C pretnú rovnobežku s BC vedenú bodom A postupne v bodoch P a Q. Nech R je priesečník kolmice na BP vedenej bodom P a kolmice na CQ vedenej bodom Q. Dokážte, že platí $|AI| = |AR|$.*

Riešenie.

Na začiatok si uvedomme, že bodom I prechádzajú osi vnútorných uhlov $\triangle ABC$. Označme I_A stred kružnice A-pripísanej $\triangle ABC$, týmto bodom prechádza os vnútorného uhla pri vrchole A a osi vonkajších uhlov pri vrcholoch B a C.

Najprv si dokážeme, že bod R leží na priamke AII_A. Je známe, že os vnútorného a os vonkajšieho uhla sú na seba kolmé, preto $BI \perp BP$ a $CI \perp CQ$, ale my vieme že aj $PR \perp BP$ a $QR \perp CQ$. Odtiaľ vyplýva $BI \parallel PR$ a $CI \parallel QR$. Spolu s $BC \parallel PQ$ máme, že $\triangle IBC$ a $\triangle RPQ$ majú zodpovedajúce si strany rovnobežné, čiže tieto trojuholníky sú rovnoľahlé. Stred danej rovnoľahlosti bude priesečník BP a CQ, čiže bod I_A. Daná rovnoľahlosť berie bod I na bod A, odkiaľ vyplieva, že body I_AIR ležia na priamke. Spolu s AII_A na priamke máme čo sme chceli dokázať.



$|\angle APB| = |\angle CBI_A| = 90^\circ - |\angle IBC| = |\angle IBP| - |\angle IBA| = |\angle ABP|$ (využili sme rovnobežnosť a vlastnosti osí uhla). $|\angle APB| = |\angle ABP| \implies \triangle APB$ je rovnoramenný. Nech X je stred PB, z rovnoramennosti vyplýva $XA \perp PB \implies PR \parallel XA \parallel BI$. V lichobežníku $BIRP$ je priamka XA rovnobežná so základňami a prechádza stredom ramena PB, je to preto jeho stredná priečka, tá potom ale musí prechádzať stredom ramena IR. Z toho vyplýva, že bod A je stred IR, čo sme chceli dokázať.

(Roland Vínzer)

Úloha C2. *Pre graf G označme $\mathcal{C}(G)$ množinu jeho cyklov. Pre každé $n \geq 6$ určite všetky možné hodnoty*[1]

$$\gcd_{C \in \mathcal{C}(G)} |C|,$$

kde G je graf o n vrcholoch, ktorého všetky vrcholy majú stupeň aspoň 3.

Riešenie. Majme graf G o $n \geq 6$ vrcholoch, pričom každý jeho vrchol má stupeň aspoň 3. Nech

$$d = \gcd_{C \in \mathcal{C}(G)} |C|.$$

Dokážeme, že $d = 1$ alebo $d = 2$.

Lemma 1. *Majme cyklus grafu G pozostávajúci z vrcholov $v_1, v_2, \dots, v_k$ (v tomto poradí). Ak existuje hrana spájajúca vrcholy v_1 a v_i, kde $3 \leq i < k$, potom $d = 1$ alebo $d = 2$.*

Dôkaz. V grafe G máme cyklus $v_1, v_2, \dots, v_k$ s dĺžkou k. Zároveň graf G obsahuje cyklus $v_1, v_2, \dots, v_i$ dĺžky i a cyklus $v_1, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k$ dĺžky $k - i + 2$. Platí teda, že $d \mid k$, $d \mid i$ a $d \mid k - i + 2$. Potom ale $d \mid (k - i + 2) - k + i = 2$, čiže d je buď 1 alebo 2. □

Nech $P = v_1, v_2, \dots, v_m$ je cesta[2] grafu G pozostávajúca z najväčšieho počtu vrcholov (ak je takých ciest viac, nech je to ľubovoľná z nich). Zo zadania vieme, že vrchol v_1 má stupeň aspoň 3, čiže musia existovať dva navzájom rôzne vrcholy a, b, ktoré susedia s vrcholom v_1 a sú rôzne od v_2.

Ak by $a \notin \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, potom by $a, v_1, v_2, \dots v_m$ bola cesta s väčším počtom vrcholov ako P, čo je spor s tým, že P je cesta s najväčším počtom vrcholov. Preto $a \in \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. Podobne $b \in \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$.

Nech $a = v_i$ a $b = v_k$. Vieme, že i a k sú rôzne od $1, 2$ (čo platí, lebo vrcholy a, b sú spojené hranou s vrcholom v_1 a sú rôzne od v_2), preto $i, k \geq 3$. Zároveň $i \neq k$ (čo platí, lebo a a b sú navzájom rôzne). Bez ujmy na všeobecnosti nech $i < k$. Potom $3 \leq i < k$.

Vrcholy $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ tvoria cyklus. Zároveň platí, že vrchol v_i je spojený s vrcholom v_1, pričom $3 \leq i < k$. Podľa lemmy 1 teda pre graf G platí $d = 1$ alebo $d = 2$, čo sme chceli dokázať.

Potrebujeme teda ešte overiť, či sa pre dané $n \geq 6$ hodnoty $d = 1$ a $d = 2$ nadobúdajú.

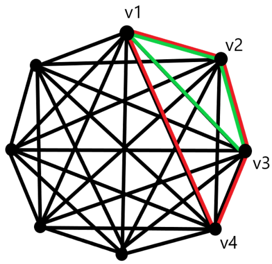
Vezmime si kompletný graf K_n (čiže graf s n vrcholmi, kde každé dva sú spojené hranou). V tomto grafe má každý vrchol stupeň $n - 1 \geq 5 > 3$. Nech v_1, v_2, v_3, v_4 sú ľubovoľné vrcholy tohto grafu. Potom existuje cyklus v_1, v_2, v_3 dĺžky 3 a cyklus v_1, v_2, v_3, v_4 dĺžky 4. Vidíme teda, že $d \mid 3$ a $d \mid 4$, a teda nutne $d = 1$. Hodnota $d = 1$ sa teda nadobúda pre každé $n \geq 6$.

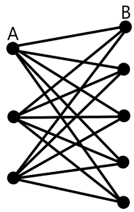
Vezmime si kompletný bipartitný graf $K_{3,n-3}$ s partíciami A, B, pričom $|A| = 3$. Inými slovami máme n vrcholov, ktoré si rozdelíme do dvoch množín A a B, pričom množina A bude obsahovať práve 3 vrcholy. Dva vrcholy spojíme hranou práve vtedy, keď jeden z nich patrí do A a druhý do B. Každý vrchol v partícii A má stupeň $n - 3 \geq 3$ a každý stupeň v partícii B má stupeň presne 3.

Majme teraz nejaký cyklus $v_1, v_2, \dots, v_k$ grafu $K_{3,n-3}$. Tento cyklus má dĺžku k. Bez ujmy na všeobecnosti nech $v_1 \in A$. Vrcholy v_1 a v_2 sú spojené hranou, a teda musia ležať v rozdielnych partíciách, čiže $v_2 \in B$. Postupne takto vieme zdôvodniť, že vrcholy v_i s nepárnym indexom i sú v množine A a vrcholy v_i s párnym indexom i sú v množine B. Keďže vrcholy v_1 a v_k sú spojené hranou, tak v_k musí ležať v B, čiže k je párne číslo. Vidíme teda, že každý cyklus grafu $K_{3,n-3}$ musí mať párnu dĺžku, a teda $2 \mid d$. Avšak ako sme už skôr dokázali, tak zároveň $d = 1$ alebo $d = 2$. Pre graf $K_{3,n-3}$ teda nutne platí $d = 2$, čiže hodnota $d = 2$ sa teda tiež nadobúda pre každé $n \geq 6$.

[1] Cyklom rozumieme postupnosť po dvoch rôznych vrcholov $v_1, \dots, v_k$ takých, že vedie hrana medzi vrcholmi v_i a v_{i+1} a medzi vrcholmi v_1 a v_k. Počet vrcholov cyklu C značíme $|C|$.

[2] Cestou nazývame postupnosť po dvoch rôznych vrcholov $v_1, \dots, v_k$ takých, že vedie hrana medzi vrcholmi v_i a v_{i+1}.



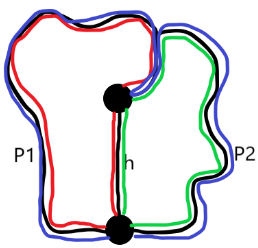


Ukázali sme teda, že pre každé $n \geq 6$ môže byť hodnota d len 1 alebo 2, pričom obe tieto hodnoty sa nadobúdajú.

Poznámky opravovateľa.

Niektoré riešenia sa pokúšali fakt, že $d = 1$ alebo $d = 2$, dokázať tak, že našli dva vrcholy spojené hranou h a ešte dvoma ďalšími cestami P_1, P_2 (pričom nepožadovali žiadne ďalšie vlastnosti). Následne pokračovali tým, že zostrojili cykly C_1 (ktorý prejde cestu P_1 a vráti sa späť na začiatok pomocou hrany h), C_2 (ktorý prejde cestu P_2 a vráti sa späť na začiatok pomocou hrany h) a C_3 (ktorý prejde cestu P_1 a vráti sa späť na začiatok pomocou cesty P_2). Následne dokázali, že $|C_3| = |C_1| + |C_2| - 2$, a teda keďže číslo d musí bezo zvyšku deliť čísla $|C_1|, |C_2|, |C_3|$, platí $d \mid |C_1| + |C_2| - |C_3| = 2$, čiže $d = 1$ alebo $d = 2$.

Problém v takomto riešení spočíva v tom, že množiny vrcholov takto nájdených ciest P_1 a P_2 nemusia byť disjunktné, a teda cyklus C_3 vôbec nemusí existovať (pretože takýto cyklus by prechádzal niektorým vrcholom dvakrát).



(Matej Vasky)

Úloha A2. *Je dané prirodzené číslo n a reálne čísla $x_1, \ldots, x_n$ splňujúce $|x_1| + \cdots + |x_n| = 1$. V závislosti na n nájdite minimum výrazu*

$$|-x_1| + |x_1 - x_2| + |x_1 + x_2 - x_3| + \cdots + |x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n|.$$

Riešenie. Ukážeme, že hledané minimum je $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Začneme konstrukcí. Nechť $x_1 = \frac{1}{2^{n-1}}$ a pro $i \geq 2$ platí $x_i = \frac{1}{2^{n+1-i}}$. Potom pro $i \geq 2$ platí

$$x_i = \frac{1}{2^{n+1-i}} = \frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{j=n-1}^{n-i} \frac{1}{2^j} = x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1}.$$

Díky tomu budou skoro všechny absolutní hodnoty v minimalizovaném výrazu nulové. Nenulová bude jen ta první, jejíž hodnota bude $|-\frac{1}{2^{n-1}}| = \frac{1}{2^{n-1}}$, přesně jak chceme.

Nyní uděláme odhad zadaného výrazu, neboli dokážeme, že nemůže být menší. Nejprve si připomeňme trojúhelníkovou nerovnost. Pro libovolná reálná čísla $a_1, \ldots, a_k$ platí

$$|a_1| + \cdots + |a_k| \geq |a_1 + \cdots + a_k|.$$

Speciálně pro libovolná reálná čísla a a b platí $|a-b| + |b| \geq |a - b + b| = |a|$, tedy $|a-b| \geq |a| - |b|$.

Nyní můžeme rozdělit každou z absolutních hodnot v minimalizovaném výrazu následujícím způsobem:

$$|x_1 + \cdots + x_{i-1} - x_i| = |x_i - (x_1 + \cdots + x_{i-1})| \geq |x_i| - |x_1 + \cdots + x_{i-1}| \geq |x_i| - |x_1| - \ldots - |x_{i-1}|.$$

Tím získáme výraz, kde jsou jen absolutní hodnoty jednotlivých proměnných. Avšak všechny až na $|x_n|$ odečteme alespoň jednou, zatímco ji přičítáme právě jednou, náš odhad je tedy hodně záporný. To vyřešíme tak, že hned na začátku absolutní hodnoty zmenšíme přenásobením nějakou nezápornou mocninou $\frac{1}{2}$. Protože absolutní hodnoty jsou nezáporné, hodnota výrazu se tím opravdu může jen zmenšit. Odhad výrazu tedy je následovný:

$$|-x_1| + |x_1 - x_2| + \cdots + |x_1 + \cdots + x_{n-1} - x_n| \geq$$

$$\geq |-x_1| + \frac{1}{2}|x_1 - x_2| + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}|x_1 + \cdots + x_{n-1} - x_n| \geq$$

$$\geq |x_1| + \frac{1}{2}|x_2| - \frac{1}{2}|x_1| + \frac{1}{4}|x_3| - \frac{1}{4}|x_1| - \frac{1}{4}|x_2| + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}|x_n| - \frac{1}{2^{n-1}}|x_1| - \ldots - \frac{1}{2^{n-1}}|x_{n-1}| =$$

$$= |x_1| \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i}\right) + |x_2| \cdot \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2^i}\right) + \cdots + |x_n| \cdot \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot (|x_1| + \cdots + |x_n|) = \frac{1}{2^{n-1}},$$

přesně jak chceme.

Poznámky opravovateľa. Konstrukce je motivována tím, že chceme většinu absolutních hodnot vynulovat a nalézt ji zvládli všichni, kdo úlohu odevzdali. Bohužel mnoho řešitelů se pokusilo tuto motivaci využít i v odhadu, což se ukázalo být scestné. Úspěšná řešení často využívala nějakou formu indukce. *(Majda Mišinová)*

Úloha N2. *Je daný nekonštantný polynóm f s celočíselnými koeficientami taký, že $f(1) \neq 1$. Pre prirodzené číslo n, budeme symbolom $D(n)$ značiť množinu jeho kladných delitelov. Prirodzené číslo m nazveme f-pekné, pokiaľ existuje nejaké prirodzené n, pre ktoré nastáva rovnosť množín*[3]

$$f(D(m)) = D(n).$$

Dokážte, že existuje iba konečne veľa f-pekných prirodzených čísel.

Riešenie.

Sporom dokážme, že vedúci koeficient polynómu f je kladný. Keby bol záporný, tak pre dostatočne veľké m platí, že $f(m)$ je vždy záporné a teda by sa $f(m)$ nemohlo rovnať žiadnemu prirodzenému číslu z nijakej množiny $D(n)$. Tým pádom vedúci koeficient polynómu je kladný.

Keďže funkčná hodnota aspoň jedného deliteľa m musí byť 1 pre všetky f-*pekné* m, tak existuje aspoň jedno číslo x pre ktoré $f(x) = 1$. Zo zadania tiež vyplýva, že aspoň jedno x je väčšie ako 1. Keďže f je polynóm, tak najväčšie x, pre ktoré toto platí označme b (lebo polynóm $f(x) - 1$ má len konečne veľa koreňov).

f-*pekných* prvočísel nie je nekonečne veľa, lebo by to znamenalo, že pre nekonečne veľa čísel nadobúda ich funkčná hodnota číslo 1.

Tým pádom nám stačí už len dokázať, že aj f-*pekných* zložených čísel je len konečne veľa. Označme si teda najmenšie prvočíslo deliace číslo m ako p a jeho druhého najväčšieho deliteľa ako d. Teda $m = pd$. Platí, že p musí byť vždy menšie rovné ako b, lebo inak by medzi deliteľmi m-ka nemohla byť ich funkčná hodnota rovná 1. To znamená, že pre nám stačí dokázať, že pre všetky prvočísla p menšie rovné ako b platí, že je len konečne veľa čísel d takých, že m je f-*pekné*. Zoberme si teda jedno z týchto prvočísel.

Číslo n musí maž aspoň dvoch deliteľov a teda označme najmenšie prvočíslo deliace n ako q a jeho druhého najväčšieho deliteľa ako e. (e sa môže rovnať 1) Vieme, že pre dostatočne veľké číslo d platí, že $f(m) > f(d) > f(\text{iný deliteľ } m\text{-ka})$, lebo od istého bodu je každý polynóm s kladným koeficientom rastúca funkcia. Keďže však máme dokázať, že takýchto d je nekonečne veľa, tak to máme dokázať aj pre nekonečne veľa „veľkých“ d (lebo „malých“ d je len konečne veľa). Tým pádom platí, že $f(pd) = eq$, $f(d) = e$, z čoho vyplýva, že máme dokázať, že pre nejaké konkrétne p, nekonečne veľa čísel d a nejaké q platí, $f(pd)/f(d) = q$.

Označme stupeň polynómu f ako α a jeho vedúci koeficient k. Potom platí, že limita postupnosti $f(pd)/f(d)$ je rovná

$$\lim_{d\to\infty} \frac{f(dp)}{f(d)} = \lim_{d\to\infty} \frac{\frac{f(dp)}{d^\alpha}}{\frac{f(d)}{d^\alpha}} = \frac{\lim_{d\to\infty} \frac{f(dp)}{d^\alpha}}{\lim_{d\to\infty} \frac{f(d)}{d^\alpha}} = \frac{kp^\alpha}{k} = p^\alpha \tag{1}$$

Polynóm f nemôže byť len konštanta krát x^α, lebo by v prirodzenom definičnom obore nedosahoval hodnotu 1 (unless niečo zakázané v zadaní). Tým pádom pre nejaké číslo d dostatočne veľké bude platiť, že $0 < |f(pd)/f(d) - p^\alpha| < 1$ a teda $f(pd)/f(d)$ nebude môcť byť celé číslo. Tým pádom pre každú dvojicu čísel p a d existuje len konečne veľa vyhovujúcich čísel d, čo dokazuje náš príklad.

(Martin „Kopy“ Kopčány)

[3]Výrazom $f(D(m))$ tu jednoducho myslíme množinu všetkých hodnôt $f(d)$ pre $d \in D(m)$.