

## Řešení 3. série

**Úloha N3.** Je dáno kladné celé číslo  $n$ . Nalezněte všechny  $n$ -tice reálných čísel  $(a_1, \dots, a_n)$  splňující soustavu rovnic

$$|a_1 - a_2| = 2 \cdot |a_2 - a_3| = \dots = (n-1) \cdot |a_{n-1} - a_n| = n \cdot |a_n - a_1|.$$

**Řešení.** Konstantní  $n$ -tice rovnici splňuje, ukážeme že jiná neexistuje. Nechť  $d_i = a_i - a_{i+1}$ , indexy brány modulo  $n$ . Snadno vyjádříme  $d_i = \frac{s_i d_1}{i}$ , kde  $s_i$  je buď  $-1$  nebo  $1$ . Také víme že

$$0 = \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n \frac{s_i d_1}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{i}.$$

Poslední sumu vynásobíme nejmenším společným násobkem čísel ne-větších než  $n$  abychom pracovali s celými čísly

$$\sum_{i=1}^n \frac{s_i \operatorname{nsn}(n)}{i} = 0.$$

Jenže teď máme na pravé straně sudé číslo a na levé součet  $n-1$  sudých čísel a jednoho lichého. To proto že mocnina 2 v prvočíselném rozkladu  $\operatorname{nsn}(n)$  je  $k$  a jediné číslo  $1 \leq i \leq n$  které je dělitelné  $2^k$  je právě  $2^k$ . Dostali jsme nesmysl, tedy žádná nekonstantní  $n$ -tice není vyhovující.

*Poznámky opravujícího.* Většina řešení byla podobná tomu vzorovému. Mnoho z nich používalo Bertrandův postulát a někdy byl zaveden poněkud vágně, kvůli čemuž nebylo jasné jak řeší úlohu pro nějaké malé  $n$ . Při použití nějaké věty je dobré ji vyslovit, zejména když není jednoznačné jak přesně ta věta vypadá. (Vašek Voráček)

**Úloha C3.** V kruhu sedí  $2n$  hladových orgů iKSka. Jeden z nich, Aleš, je ze všech nejhladovější. Na začátku je mezi orgy nějak rozděleno  $m$  sušenek. Orgové si mohou sušenky posílat podle následujících dvou pravidel:

- (i) Každý může sušenku poslat pouze svému sousedovi či sousedce.
- (ii) Pokaždé, když org předává sušenku, musí sám také jednu další sušenku sníst.

V závislosti na  $n$  najděte nejmenší číslo  $m$  takové, že při libovolném počátečním rozdělení sušenek mohou orgové konat tak, aby se k Alešovi dostala alespoň jedna sušenka.

**Řešení.** Ukážeme, že nejmenší možné  $m$  je rovné  $2^n$ . Nejprve ukážeme, že  $m$  je alespoň  $2^n$ .

Označme si orgy v kruhu  $A_{-n+1}, A_{-n+2}, \dots, A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  tak, že  $A_0$  je Aleš, přičemž píšme  $A_{-n} = A_n$ . Všimněme si, že pokud org pošle sušenku sousedícímu orgovi s nižší absolutní hodnotou indexu (například  $A_4$  k  $A_3$ ), jednu též sní. Org  $A_3$  tak získal sušenku, která má „dvakrát vyšší“ potenciál se dostat k Alešovi. Tuto myšlenku zrobustníme.

Zavedeme veličinu, která bude cenit více sušenku u orga, pokud je blíže k Alešovi. Označme tedy  $a_i$  počet sušenek, které v daný moment drží org  $A_i$ , tomuto orgovi též přiřadíme *potenciál*  $\frac{1}{2^{|i|}}$  a *potenciální váha* sušenek tohoto orga bude  $\frac{a_i}{2^{|i|}}$ . Potom veličina

$$P = \sum_{i=-n+1}^n \frac{a_i}{2^{|i|}}$$

je skrz celý proces předávání sušenek monovariantní. Totiž při předání org buď pošle sušenku orgovi s vyšším a nebo nižším potenciálem. V prvním případě se  $P$  zjevně nezmění, v tom druhém se  $P$  sníží. Proto  $P$  je nerostoucí veličina. Pokud se v nějaký moment dostane sušenka

k Alešovi, tak musí  $P$  být na začátku procesu být alespoň potenciál Aleše, tj. 1. Pokud uvažíme situaci, že na začátku je všech  $m$  sušenek u orga  $A_n$ , tak aby se nějaká dostala k Alešovi, musí platit  $\frac{m}{2^n} \geq 1$ , tedy  $m \geq 2^n$ . Dále ukážeme, že pro libovolné rozložení  $m \geq 2^n$  sušenek mezi orgy dostaneme sušenku k Alešovi.

Dejme tomu, že Aleš nemá žádné sušenky, tedy  $a_0 = 0$ . Všimněme si ale, že potom

$$\sum_{i=-n+1}^{-1} a_i + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq 2^n - a_n,$$

tedy alespoň jeden ze součtů na levé straně je alespoň  $\frac{2^n - a_n}{2}$ . BÚNO nechť  $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq \frac{2^n - a_n}{2}$ . Tvrdíme, že když všichni orgové  $A_1, A_2, \dots, A_n$  budou dávat sušenky směrem k Alešovi (tedy org  $A_i$  bude vždy dávat sušenku orgovi  $A_{i-1}$ ), tak Aleš nějakou dostane. Pro spor nechť žádnou nedostane a žádný z orgů už nemůže žádnou sušenku poslat (tedy každý má jednu nebo žádnou). V takovém případě největší možný součet *potenciálních vah* orgů  $A_1, A_2, \dots, A_n$  je  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$  a to, když všem zbude právě jedna sušenka. Součet *potenciálních vah* ale můžeme odhadnout ještě následovně:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2^i} = \frac{a_n}{2^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{2^i} \geq \frac{a_n}{2^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{2^{n-1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \frac{2^n - a_n}{2} = 1$$

Dostáváme tak, že součet vah je určitě alespoň jedna. Pokud ale budeme posouvat sušenky směrem k Alešovi tak, jak jsme již řekli, se tento součet vah nebude měnit. Zároveň ale pokud by neměl Aleš nic získat, tak jak jsme již ukázali, by součet vah musel být ostře méně než 1. Někáká sušenka se tedy k Alešovi určitě musí dostat.

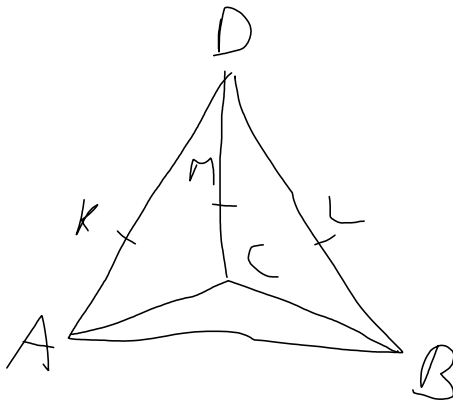
(Zdeněk Pezlar)

**Úloha G3.** *Sféru nazveme  $[XY]Z$ -průměrnou, pokud její průnik s rovinou  $XYZ$  tvoří kružnici nad průměrem  $XY$ . Čtyřstěn  $XYZW$  nazveme  $XYZ$ -kulový, pokud existuje sféra  $S$  procházející vrcholy  $X, Y$  a  $Z$ , která je zároveň  $[XY]W$ -,  $[YZ]W$ - i  $[ZX]W$ -průměrná. Dokažte, že pokud čtyřstěn  $ABCD$  je  $BCD$ -kulový, pak je i  $ABC$ -kulový.*

**Řešení.** Ukážeme, že čtyřstěn je  $ABC$ -kulový právě tehdy když jeho protější hrany jsou na sebe kolmé. Protože tato charakterizace je symetrická, tak z toho plyne celá úloha.

Předpokládejme, že je čtyřstěn  $ABC$ -kulový se sférou  $S$ . Pak označme postupně  $K, L, M$  průsečíky  $S$  s  $DA, DB, DC$ . Protože sféra  $S$  je  $[AB]D$ -průměrná, tak  $BK \perp DA$ . Analogicky, protože je  $[AC]D$ -průměrná, tak  $CK \perp DA$ . Z toho, že  $BK \perp DA \perp CK$  platí  $BKC \perp AD$  a tedy  $BC \perp AD$ . Analogicky dostaneme, že  $AB \perp DC$  a  $AC \perp DB$ .

Na druhou stranu, předpokládejme, že protilehlé hrany jsou na sebe kolmé. Pak označme  $K$  bod na  $AD$  takový, že  $CBK \perp DA$ . Dále označme  $L$  bod na  $DB$  takový, že  $ACL \perp DB$ . A nakonec označme  $M$  bod takový, že  $AMB \perp DC$ . Nyní sestrojíme sféru  $S$  takovou, která prochází body  $A, B, C, K$ . Pak protože  $AK \perp KB$ , tak je  $[AB]D$ -průměrná. Analogicky protože  $CK \perp DA$ , tak je  $[CA]D$ -průměrná. Protože je  $[AB]D$ -průměrná, tak  $L$  leží na  $S$ . A protože  $CL \perp DB$ , tak je  $S$  i  $[CB]D$ -průměrná. Tedy je čtyřstěn  $ABC$ -kulový.



(Radek Olšák)

**Úloha A3.** Najděte všechny polynomy  $P(x)$  s celočíselnými koeficienty takové, že pro každé kladné celé číslo  $n$  má polynom  $\underbrace{P(\dots P(x) \dots)}_{n\text{-krát}}$  všechny kořeny celočíselné.<sup>1</sup>

*Řešení.* Rozebereme postupně polynomy podle stupňů. Nejprve se podíváme na konstantní polynom  $P(x) = k$ . Pokud by bylo  $k = 0$ , tak má zjevně neceločíselný kořen, takže není řešením. Pro  $k \neq 0$  a libovolné  $n \in \mathbb{Z}^+$  je  $P^n(x) = k$ , což nemá žádný kořen, takže libovolné  $P(x) = k \neq 0$  vyhovuje zadání.

Nyní se podíváme na polynomy prvního stupně. Nejprve na polynomy tvaru  $P(x) = \pm x + a$ , kde  $a \in \mathbb{Z}$ . Takoveto polynomy mají vždy jeden celočíselný kořen  $\mp a$ . Můžeme si ale všimnout, že poté máme  $P^n(x) = (\pm 1)^n x + a_n$ , kde  $a_n$  je opět nějaké celé číslo. Takovýto polynom má opět jeden celočíselný kořen a vyhovuje tedy zadání. Pokud nyní máme polynom tvaru  $P(x) = kx + a$ , kde  $|k| \geq 2$ , tak máme kořen  $-\frac{a}{k}$ , který aby byl celočíselný, musí platit  $k \mid a$ . Máme ale  $P^n(x) = k(k \cdots ((kx + a) + a) \cdots) + a = k^n x + \sum_{i=0}^{n-1} k^i a = k^n x + a \sum_{i=0}^{n-1} k^i$ . Aby kořen tohoto polynomu byl opět celočíselný, musí platit  $k^n \mid a \sum_{i=0}^{n-1} k^i$ . Můžeme si ale všimnout, že  $\gcd(k, \sum_{i=0}^{n-1} k^i)$  je z jednoduchého Eukleidova algoritmu rovno 1. Tím pádem i  $\gcd(k^n, \sum_{i=0}^{n-1} k^i) = 1$  a aby platilo  $k^n \mid a \sum_{i=0}^{n-1} k^i$ , musíme mít  $k^n \mid a$ . Toto by mělo platit pro každé  $n$ .  $k^n$  ale není omezené, tedy pro dost velké  $n$  určitě platí  $|k^n| > |a|$ , takže aby platilo  $k^n \mid a$  musí být  $a = 0$ . Máme tak, že pro  $|k| \geq 2$  musíme mít už polynom  $P(x) = kx$ , který zjevně vyhovuje. ( $P^n(x)$  má vždy pouze jeden kořen, a to nulu.)

Nakonec se podíváme na polynomy, jejichž stupeň  $d$  je alespoň dva. Takový polynom musí mít ze zadání právě  $d$  celočíselných kořenů včetně násobností. Pro spor nyní předpokládejme, že má dva kořeny  $a, b \in \mathbb{Z}$  takové, že  $a \neq b$ . Polynom si můžeme rozložit na jednotlivé lineární členy a dostaneme tak  $(x - a)(x - b) \mid P(x)$ . Za  $x$  můžeme "dosadit"  $P(x)$ , čímž dostaneme  $(P(x) - a)(P(x) - b) \mid P(P(x)) = P^2(x)$ . Všechny kořeny polynomů  $P(x) - a$  a  $P(x) - b$  jsou zároveň kořeny  $P^2(x)$ , tedy musí být ze zadání celočíselné. Označme si postupně kořeny  $P(x) - a$  jako  $a_1, a_2, \dots, a_d$  a kořeny  $P(x) - b$  jako  $b_1, b_2, \dots, b_d$ . Ze známého vztahu  $r - s \mid P(r) - P(s)$  pro libovolná  $r, s \in \mathbb{Z}$  a  $P \in \mathbb{Z}[x]$  máme  $a_i - b_j \mid P(a_i) - P(b_j) = a - b$ . Podíváme se teď na dva různé případy:

<sup>1</sup>Říkáme, že polynom  $Q$  má všechny kořeny celočíselné, pokud pro každé  $z \in \mathbb{C}$  splňující  $Q(z) = 0$  platí  $z \in \mathbb{Z}$ .

1. Pro všechny  $1 \leq i, j \leq d$  platí  $|a_i - b_j| = |a - b|$ . Ukážeme teď, že je  $a_1 = a_2 = \dots = a_d$  nebo  $b_1 = b_2 = \dots = b_d$ . Dejme tomu, že  $a_1, a_2, \dots, a_d$  nejsou všechna stejná, tedy existuje  $i, j$  takové, že  $a_i \neq a_j$ . Všimněme si ale, že pro každé  $i$  z našeho předpokladu platí, že je buď  $a_i = b_1 + |a - b|$ , nebo  $a_i = b_1 - |a - b|$ . Protože ale existují  $a_i \neq a_j$ , tak pro nějaké  $i$  je  $a_i = b_1 + |a - b|$  a pro nějaké  $j$  je  $a_j = b_1 - |a - b|$ . Z předpokladu máme, že pro každé  $1 \leq k \leq d$  je  $|a_i - b_k| = |a_j - b_k| = |a - b|$ . Protože ale  $|a_i - a_j| = 2|a - b|$ , tak musí být  $b_k = \frac{a_i + a_j}{2}$ , neboli jsou si všechna  $b_1, b_2, \dots, b_d$  rovna.

Máme tak opravdu, že si jsou  $a_1, a_2, \dots, a_d$  nebo  $b_1, b_2, \dots, b_d$  rovny. BÚNO nechť  $a_1 = a_2 = \dots = a_d$ , neboli  $P(x) - a = k(x - a_1)^d$ , kde  $k \neq 0$  je nějaké celé číslo. V případě, že  $d \geq 3$ , kořeny polynomu  $P(x) - b = k(x - a_1)^d + a - b$  tvoří v komplexní rovině pravidelný

$d$ -úhelník se středem v čísle  $a_1$  a poloměrem (vzdáleností kořenů od středu)  $\sqrt[d]{\left|\frac{b-a}{k}\right|} \neq 0$  (máme  $a \neq b$ ). Protože ale  $d \geq 3$ , tak nemohou všechna tato čísla ležet na reálné ose a nějaká z nich musí být komplexní. Už jsme ale ukázali, že všechny kořeny polynomu  $P(x) - b$  jsou i kořeny polynomu  $P^2(x)$ . Máme tak spor.

2. Jinak existují  $1 \leq i, j \leq d$  taková, že  $0 < |a_i - b_j| < |a - b|$ .

Vezmeme si nyní polynom  $P'(x) = P^2(x)$  a zvolme si  $a' = a_i$  a  $b' = b_j$ , což už víme, že jsou kořeny polynomu  $P^2(x)$ . (Zároveň víme, že  $a_i \neq b_j$ .) Stupeň tohoto polynomu je alespoň  $d^2 \geq 4$ . S těmito čísly  $a'$  a  $b'$  a polynomem  $P'(x)$  můžeme nyní provést stejnou věc jako s polynomem  $P(x)$  a čísly  $a$  a  $b$ . Všimněme si ale, že díky  $\deg(P^n(x)) \geq \deg(P^2(x)) = d^2 \geq 4$  nemůže nastat první případ (v něm totiž pro stupně větší než 2 máme spor). Musí tak vždy nastat druhý případ. Toto můžeme dělat donekonečna, čímž získáme ostře klesající posloupnost přirozených čísel  $|a - b| > |a' - b'| > |a'' - b''| > \dots > 0$ . Žádná taková posloupnost ale neexistuje.

Konečně tak máme, že všechny kořeny polynomu  $P(x)$  jsou si rovny, tedy  $P(x) = k(x - a)^d$ . Pokud  $a \neq 0$ , tak má  $P^2(x) = k(k(x - a)^d - a)^d$  v případě  $d \geq 3$  opět nějaký komplexní kořen (obdobně jako předtím). Pokud  $d = 2$ , tak má  $P^2(x)$  dvojici různých kořenů  $a \pm \sqrt{\frac{a}{k}}$ . Pokud jsou komplexní, tak jsme už hotovi. Jinak můžeme postupovat podle toho, když má nějaký polynom různé kořeny, z čehož ale máme spor.

Zbývají nám už tak pouze polynomy tvaru  $P(x) = kx^d$ , které zadání zjevně splňují, protože  $P^n(x)$  má vždy pouze jediný kořen, a to nulu. Dohromady tak máme následující řešení:

- $P(x) = \pm x + a$ , kde  $a \in \mathbb{Z}$
- $P(x) = kx^d$ , kde  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  a  $d \in \mathbb{N}_0$

(Radek Olšák)