

Řešení 6. série

Úloha A6. Najdite všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, které splňají následovné podmínky:

- Pre každé x platí $f(x^2) = f(x)^2 - 2xf(x)$.
- Pre každé x platí $f(-x) = f(x - 1)$.
- Ak $1 < x < y$, tak potom $f(x) < f(y)$.

Řešení. Ukážeme, že jediným řešením je $f(x) = x^2 + x + 1$. Netradičně urobíme skůšku hned na začiatku:

$$f(x^2) = x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^2 - 2x(x^2 + x + 1) = f^2(x) - 2xf(x),$$

$$f(-x) = x^2 - x + 1 = (x - 1)^2 + (x - 1) + 1 = f(x - 1)$$

a keďže pre všetky $x > 1$ je x^2 aj x rastúca, tak aj f je rastúca na $\langle 1, \infty \rangle$.

Označme $g(x) = x^2 + x + 1$ a ukážeme, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Dosadením $x = t$ a $x = -t$ do prvého vzťahu dostávame:

$$f(t^2) = f^2(t) - 2tf(t) = f^2(-t) + 2tf(-t)$$

$$f^2(t) - f^2(-t) = 2tf(t) + 2tf(-t)$$

$$(f(t) - f(-t))(f(t) + f(-t)) = 2t(f(t) + f(-t))$$

Keďže obor hodnôt f je kladný tak $f(t) + f(-t) > 0$ a po vydelení dostávame $f(t) - f(-t) = 2t$ a dosadením podľa $f(-x) = f(x - 1)$ dostávame

$$f(t) - f(t - 1) = 2t.$$

Ďalej si dokážeme nasledujúce tvrdenie (*):

Ak pre dané y platí $f(y) = g(y)$, tak aj $f(y + 1) = g(y + 1)$ a $f(y - 1) = g(y - 1)$, a pokiaľ je $y \geq 0$, tak aj $f(\sqrt{y}) = g(\sqrt{y})$.

Podľa vyššie uvedeného vzťahu platí

$$f(y + 1) - f(y) = 2(y + 1),$$

teda

$$f(y + 1) = y^2 + y + 1 + 2(y + 1) = (y + 1)^2 + (y + 1) + 1 = g(y + 1).$$

Podobne vieme, že

$$f(y) - f(y - 1) = 2y,$$

teda

$$f(y - 1) = y^2 + y + 1 - 2y = (y - 1)^2 + (y - 1) + 1 = g(y - 1).$$

Ďalej dosadíme $x = \sqrt{y}$ do prvého vzťahu. Dostaneme

$$y^2 + y + 1 = f(y) = f^2(\sqrt{y}) - 2\sqrt{y}f(\sqrt{y}).$$

Označíme $a = f(\sqrt{y})$ a dostaneme

$$a^2 - 2a\sqrt{y} - (y^2 + y + 1) = 0.$$

Táto kvadratická rovnica má iba jedno kladné riešenie $a = y + \sqrt{y} + 1$, a preto $f(\sqrt{y}) = a = g(\sqrt{y})$.

Dosadením $x = 0$ do prvého vzťahu v zadaní dostávame $f(0) = f^2(0)$ a keďže obor hodnôt f je kladný tak $f(0) = 1$, a teda $f(0) = g(0)$. Indukciou z (*) dostaneme, že $f(x) = g(x)$ pre všetky celé x a pre všetky $x = \sqrt[k]{n}$ kde n, k su prirodzené. Ak by sme teraz ukázali, že $f(x) = g(x)$

pre všetky x z nejakého intervalu $(z, z + 1)$, tak využitím $(\star)$ pomocou indukcie dostaneme, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Zoberme si teda $z = 2$ a dokážme, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in (2, 3)$. Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že existuje nejaké také $y \in (2, 3)$, že $f(y) \neq g(y)$. Je jasné, že $y \neq 2$, $y \neq 3$ a $7 = g(2) < f(y) < g(3) = 13$, inak by sme dostali spor okamžite z rastúcnosti. Keďže g je spojitá, tak určite existuje $h \in (2, 3)$ také, že $g(h) = f(y)$.

Najprv si zoberte prípad, že $g(h) = f(y) > g(y)$. Z rastúcnosti funkcie g vieme, že $3 > h > y > 2$. Ukážeme, že v $(g(y), f(y))$ existuje číslo c také, že $c = g(\sqrt[2^k]{n})$ pre nejaké prirodzené n , k . Potom z rastúcnosti funkcie g na intervale $(2, 3)$ dostaneme, že $y < \sqrt[2^k]{n}$ a podľa $(\star)$ vieme, že $f(\sqrt[2^k]{n}) = g(\sqrt[2^k]{n}) < f(y)$ a dostávame spor s rastúcnosťou funkcie f na $(2, 3)$. Stačí teda ukázať, že také c existuje. Uvažujme

$$h^{2^k} - y^{2^k} = (h - y)(h + y)(h^2 + y^2) \cdots (h^{2^{k-1}} + y^{2^{k-1}}).$$

Keďže $h, y > 1$, tak $h^{2^k} - y^{2^k} > 2^k(h - y)$ a teda určite ide zvoliť také k , aby $h^{2^k} - y^{2^k} > (h - y)2^k > 1$. Nakoľko medzi h^{2^k} a y^{2^k} určite existuje nejaké prirodzené n , potom $\sqrt[2^k]{n}$ je v (y, h) a teda aj $c = g(\sqrt[2^k]{n})$ je v $(g(y), f(y))$. Uvedené c sme našli a teda nastáva spor. V prípade, že $g(y) > f(y)$, postupujeme analogicky. Preto je jediné vyhovujúce riešenie $f(x) = x^2 + x + 1$.

Poznámky opravujúciho. Skoro všetci riešitelia sa s príkladom popasovali správne, bohužiaľ poniektorí nešťastníci zabudli na skúšku. (Marta Kossaczká)

Úloha N6. Nájdite všetky prirodzené čísla k také, že súčin prvých k nepárnych prvočísel sa dá zapísať v tvare $a^b + 1$, kde a, b sú prirodzené čísla, pričom $b > 1$.

Riešenie. Označme si prvých k nepárnych prvočísel $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ a ich súčin P_k .

Prvé pozorovanie je, že nám stačí uvažovať prvočíselné b . Prečo? Nuž, ak $b = cp$, kde p je prvočíslo, tak ak $P_k = a^b + 1 = a^{cp} + 1 = (a^c)^p + 1$, a máme ho zapísané v tom istom tvare, no exponent je prvočíslo.

Zrejme $b \neq 2$, lebo $3 \mid P_k$ a teda $a^b \equiv -1 \pmod{3}$. Avšak -1 nie je kvadratický zvyšok modulo 3.

Nech $b = p \leq p_k$. Zrejme $p \mid P_k$, preto $a^p \equiv -1 \pmod{p}$. No z malej Fermatovej vety $a^p \equiv a \pmod{p}$, a teda $a \equiv -1 \pmod{p}$. No teraz podľa LTE vieme povedať, že $\nu_p(a^p + 1) = \nu_p(a + 1) + \nu_p(p) \geq 2$. (kde $\nu_p(m)$ znamená, koľkokrát je prvočíslo p v prvočíselnom rozklade m). A teda $p^2 \mid P_k$, čo je spor, lebo každé prvočíslo delí P_k najviac v prvej mocnine.

Z toho vieme povedať, že $b > p_k$. Zrejme a nie je deliteľné žiadnym prvočíslom od p_1 až po p_k . (inak aj a^b aj $a^b + 1$ sú deliteľné tým prvočíslom). Keby $a > p_k$, tak zrejme $a^b + 1 > p_k^{p_k} > p_k^k > P_k$, čo je spor.

Ostal nám teda už len jeden prípad, a to ten, že $a = 2^l$. Potom $a^b + 1 = 2^{bl} + 1$. No mocniny 2 dávajú po delení 7 zvyšky len 1, 2 a 4. Preto toto nie je deliteľné 7, avšak P_k pre $k \geq 3$ je.

Vyskúšať prípady $k = 1$, $k = 2$ nie je ťažké a ani jeden z nich nevyhovuje ($P_1 = 3$, $P_2 = 15$). Prešli sme teda všetky možnosti a nikde nevyšlo riešenie. Preto také k neexistuje.

Poznámky opravujúciho. Prípad $b \leq p_k$ (asi najťažší) šiel vyriešiť aj bez LTE – stačilo si položiť $a = mp - 1$ a roznásobiť. Okrem toho na tomto príklade nebolo skoro nič ťažké, len sa netreba báť začať rozoberať možnosti a dúfať, že časom dôjdu. Lebo potom väčšina krokov bola skoro zadarmo. (Maťo „Vodka“ Vodička)

Úloha G6. Majme konvexný štvoruholník $ABCD$ s kolmými uhlopriečkami pretínajúcimi sa v bode E . Označme P bod na strane AD rôzny od A taký, že $EP = EC$. Kružnica opísaná trojuholníku BCD pretína stranu AD v bode Q , ktorý je rôzny od A . Kružnica prechádzajúca

cez A , ktorá sa dotýka EP v bode P , pretína úsečku AC v bode R . Ak B , Q , R sú kolíneárne, tak ukážte, že $|\angle EBCD| = 90^\circ$.

Řešení. (Voľne podľa Buj Truc Lama.) Skúsme sa pozrieť najprv na bod R . Je dosť komplikovane zafinovaný, tak si skúsme prepísať podmienky na zmysluplnejšie. Pozrime sa na mocnosť bodu E ku kružnici dotýkajúcej sa AD v P prechádzajúcej cez A . Platí $|ER| \cdot |EA| = |EP|^2 = |EC|^2$. Všimnime si, že sme práve využili naplno informáciu o bode P , a bod R je jednoznačne určený.

Úloha sa nám dosť zjednodušila. Zafixujeme si body A , B , D , E a pozrime sa, čo sa stane, ak budeme posúvať bod C po priamke EA smerom od bodu E . Bod P sa bude hýbať k bodu D a bod R k bodu A (poriadne si to rozmyslite). Podobne, ak budeme posúvať bod C po priamke EA smerom k bodu E , bod P sa bude hýbať k bodu A a bod R k bodu E . Teda rovnosť uhlov $|\angle QBD| = |\angle RBD|$ (ekvivalentná s kolínearitou B, R, Q) môže platiť pre najviac jednu polohu bodu C . Ukážeme, že to platí pre $|\angle BCD| = 90^\circ$.

Ak $|\angle BCD| = 90^\circ$, tak z Euklidovej vety o výške vyplýva $|ED| \cdot |EB| = |EC|^2 = |ER| \cdot |EA|$, a vďaka tomu, že $|\angle BER| = 90^\circ = |\angle DEA|$, máme podobnosť trojuholníkov DEA a BER , z čoho $|\angle DAE| = |\angle RBD|$. Ďalej z tetivovosti $BCDQ$ máme $|\angle AQB| = 90^\circ$ a keďže tiež $|\angle AEB| = 90^\circ$, tak dostávame tetivovosť $ABEQ$, ktorá nám zaručuje rovnosť $|\angle QAE| = |\angle QBE|$. Dokopy teda $|\angle RBD| = |\angle DAE| = |\angle QAE| = |\angle QBE| = |\angle QBD|$, čo nám dáva požadovanú kolínearitu Q, R, B .
(Filip „Hiphop“ Hanzely)

Úloha C6. V každom vrchole pravidelného n uholníka je položená minca. V každom ťahu si vyberieme nejakú stranu, a vymeníme 2 mince, ktoré ležia vo vrcholoch vybranej strany. Urobíme niekoľko takých ťahov, až nakoniec každá dvojica mincí bude vymenená práve raz. Dokážte, že nejaká strana nebola vybraná (teda že sa nevymieňali mince v jej vrcholoch).

Řešení. (Podľa Anh Dung Le Tondu.) Ukážme najprv, že existuje minca, ktorá sa hýbe len jedným smerom.

Označme jeden smer pohybu po kružnici ako kladný a druhý ako záporný. Ak sa minca i pohla v k_i ťahoch kladným smerom, potom sa v $n - 1 - k_i$ ťahoch pohla záporným smerom (v každom ťahu, keď sa s nejakou mincou vymenila, sa pohla práve jedným smerom a spolu sa vymenila práve raz s každou zo zvyšných $n - 1$ mincí). Sústreďme sa na niektorú mincu s maximálnym k_i ; označme ju x .

Postupujme sporom – predpokladajme, že $k_x < n - 1$, teda minca x sa aspoň v jednom ťahu pohla záporným smerom. V posledom z takýchto ťahov (označme ho t) sa vymenila s mincou, ktorú označíme y . Teraz oddelene ukážme, že:

- Tesne pred ťahom t bolo $k_y \geq k_x$.
Ak sa v nejakom ťahu pohla x kladným smerom a vymenila sa pri tom s mincou z , dostane sa tým z medzi x a y (tie sa zatiaľ ešte vymeniť nemohli). Na to, aby sa mohla y spomenutým spôsobom vymeniť s x , sa musí pred tým vymeniť so z tak, že sa y pohne kladným smerom (z a x sa už vymeniť nemôžu). Ak teda výmenou s mincou z narastie k_x o 1, tak musí k_y tiež výmenou so z narásť o 1; to platí pre každú mincu z , teda $k_y \geq k_x$.
- Po ťahu t je vždy $k_y > k_x$.
Hneď po ťahu t to platí, lebo pred ním bolo $k_y \geq k_x$ a počas neho sa k_y zväčšilo o 1. Mince x sa už smie hýbať len v kladnom smere (z predpokladov o ťahu t) a nesmie sa pri tom už vymeniť s y , preto sa y musí ešte pohnúť kladným smerom aspoň toľko krát, koľko krát sa ešte pohne x . Tým je dokázané aj $k_y > k_x$.

Už je jasné, že minca y bude mať väčšie k ako minca x , čo je spor s maximalitou k_x . Preto je $k_x = n - 1$ a x sa hýbe len kladným smerom.

Teraz ukážme, že hrana h , ktorá nebola vybraná pri žiadnej výmene s mincou x , ostala nevybraná celý čas. Postupujme opäť sporom – predpokladajme, že v nejakom ťahu t je táto hrana použitá pri výmene mincí y, z rôznych od x .

Dovtedy si môžeme hranu h zmazať a zvyšok kružnice narovnať na úsečku; vidíme, že všetky mince, ktoré sa s x vymenili, sú na jednej strane (BÚNV naľavo) od x , a všetky, ktoré sa s x nevymenili, sú napravo. V ťahu t sa vymenia mince na koncoch tejto úsečky; BÚNV y na ľavom a z na pravom konci. Odteraz sa ale bude minca x musieť vymeniť s y na to, aby sa mohla vymeniť so z (lebo y, z sa zasa vymeniť nemôžu a x, z sa majú vymeniť tak, že sa x pohne kladným smerom); to ale nemôže, lebo x, y sa už raz vymenili.

Došli sme k sporu so zadanim – nevieme vymeniť všetky mince (napr. x, z). Preto musí hrana h ostať nepoužitá. Nielen že sme tvrdenie zo zadania dokázali, ale aj popísali, o ktorú hranu ide.

(Jakub „Xellos“ Šafin)