Zadanie 4. série

Termín odoslania: 8. novembra 2021

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha A4. Je dané prirodzené číslo $n \geq 4$ a kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spĺňajúce rovnosť $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Dokážte, že

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{1+x_{n-1}+x_{n-1}x_n} + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1.$$

Úloha N4. Nájdite všetky kladné celé n, pre ktoré je

$$\frac{n^2+1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2+2}$$

celé číslo.[1]

Úloha C4. Pepa a Matěj hrajú nasledujúcu hru v rovine. Najskôr si Pepa zvolí nejakú funkciu $f : \mathbb{R} \to \langle 0, 2021\rangle$. Body (x, y) v rovine, ktoré spĺňajú

$$f(x + f(y)) = y,$$

zafarbíme ružovo. Na začiatku hry sa Matěj postaví do nejakého ružového bodu, vzápätí sa do nejakého ružového bodu postaví aj Pepa. Potom sa budú striedať v ťahoch. Začína Pepa, ktorý v každom svojom ťahu skočí na ľubovoľný ružový bod, ktorý je od neho vzdialený nanajvýš 2021. Matěj vo svojom ťahu skočí na nejaký ružový bod, ktorý je vzdialený nanajvýš c od neho.[2] Určte najmenšie možné reálne číslo c, pre ktoré vie Matěj vždy chytiť Pepu. Matěj Pepu chytí, ak po nejakom ťahu s ním stojí v rovnakom bode.

Úloha G4. Je daný trojuholník ABC s kružnicou opísanou ω. Majme bod P na ω rôzny od A, B, C. Priamky AP, BP, CP pretnú BC, CA, AB po rade v bodoch D, E, F. Označme X kolmý priemet bodu D na priamku spájajúcu stredy AP a BC, potom Y kolmý priemet E na priamku spájajúcu stredy BP a CA, a nakoniec Z kolmý priemet F na priamku spájajúcu stredy CP a AB. Dokážte, že keď sa P bude pohybovať po ω, tak množina stredov všetkých kružníc opísaných $\triangle XYZ$ bude kružnica.

[1] Pre reálne x označuje $\lfloor x \rfloor$ najväčšie celé číslo menšie alebo rovné x.

[2] Pepa aj Matěj môžu vo svojom ťahu aj ostať na rovnakom bode.