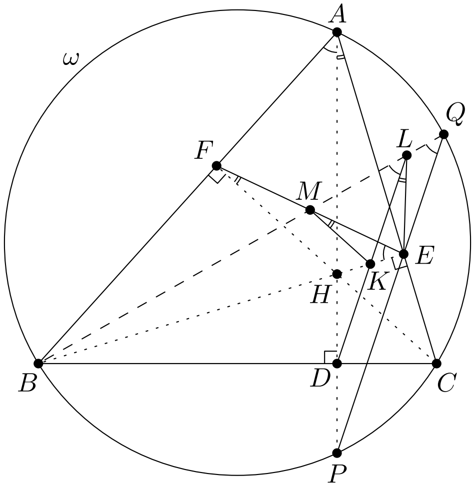
Riešenia 6. série

Úloha G6. *V ostrouhlom trojuholníku ABC s opísanou kružnicou ω sú E, F päty výšok z vrcholov B, C a priesečník BE s CF je H. Priamka AH po druhýkrát pretne ω v bode $P \neq A$. Priamka PE pretne ω po druhýkrát v bode $Q \neq P$. Dokážte, že BQ rozpoľuje úsečku EF.*

Riešenie. Patu výšky v trojúhelníku ABC z vrcholu A označíme D. Nechť K a L jsou postupně body na BE a BQ tak, aby D, K a L ležely na jedné přímce rovnoběžné s EP. Průsečík BQ a EF označíme M.



Víme, že P je obraz H podle BC, takže D je střed HP. Protože DK je rovnoběžná s EP, je DK střední příčka trojúhelníku HPE. Tudíž K je střed EH. Stačí nám proto dokázat, že KM je rovnoběžná s FH – potom totiž budeme vědět, že KM je střední příčka trojúhelníku EFH, tedy M je střed EF, což chceme.

Úhly v trojúhelníku ABC označíme obvyklým způsobem. Platí

$$\angle MLK = \angle BLD = \angle BQP = \angle BAP = 90^\circ - \beta = \angle BCF = \angle BEF = \angle KEM,$$

takže čtyřúhelníky $MKEL$ a $BDLA$ jsou tětivové. Protože úhel ADB je pravý, průměrem kružnice opsané $BDLA$ je AB. Zároveň úhel AEB je také pravý, tedy E na této kružnici též leží. Tím pádem

$$\angle KME = \angle KLE = \angle DLE = \angle DAC = 90^\circ - \gamma = \angle EBC = \angle CFE = \angle HFE.$$

Tudíž $HF \parallel KM$, přesně jak jsme chtěli. *(Rado Švarc)*

Úloha A6. *Nájdite všetky reálne čísla k také, že polynóm $x^2 + kx + 1$ je možné vyjadriť ako podiel dvoch nenulových polynómov s nezápornými koeficientami.*

Riešenie. Jsou to všechna $k > -2$. Zaprvé nechť k vyhovuje, pak

$$x^2 + kx + 1 = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

pro nějaké polynomy P, Q s nezápornými koeficienty. Zřejmě musí oba být nenulové, takže z nezápornosti koeficientů jsou $P(1)$ i $Q(1)$ kladná čísla. Z toho

$$1^2 + k \cdot 1 + 1 = \frac{P(1)}{Q(1)} > 0,$$

neboli $k > -2$.

Nyní nechť naopak $k > -2$. Pokud $k \geq 0$, stačí vzít $P(x) = x^2 + kx + 1$ a $Q(x) = 1$. Nadále tedy uvažujme $-2 < k < 0$. Zaveďme posloupnost reálných čísel $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ vztahy $u_0 = k$ a $u_{n+1} = 2 - u_n^2$ pro $n \geq 0$. Všimněme si, že

$$\left(x^2 + u_n x + 1\right)\left(x^2 - u_n x + 1\right) = x^4 + (2 - u_n^2)x^2 + 1 = x^4 + u_{n+1}x^2 + 1.$$

Dokud tedy $u_n < 0$, lze výchozí polynom postupně násobit polynomy s nezápornými koeficienty $(x^{2^{n+1}} - u_n x^{2^n} + 1)$ a dostávat tak polynomy tvaru $x^{2^{n+1}} + u_n x^{2^n} + 1$. Budeme chtít ukázat, že posloupnost $\{u_n\}$ má vždy nezáporný člen.

Nechť jej pro spor nemá. Z $-2 < u_n < 0$ plyne i $u_n^2 < 4$, tedy $u_{n+1} = 2 - u_n^2 > -2$. Indukcí a předpokladem sporu z toho pak $-2 < u_n < 0$ pro všechna n. Dále platí

$$u_{n+1} - u_n = 2 - u_n - u_n^2 = (2 + u_n)(1 - u_n),$$

což musí být vždy kladné číslo, neboli posloupnost u_n je rostoucí. Označme $f(x) = (2+x)(1-x)$. Vedoucí koeficient f je záporný a grafem této funkce je parabola s vrcholem v $x = -\frac{1}{2}$, pročež je určitě f na intervalu $(-2, -1\rangle$ rostoucí, pro $x \in (-1, 0)$ pak nutně musí být $2 + x > 1$ i $1 - x > 1$ neboli $f(x) > 1$. Rostoucností posloupnosti $\{u_n\}$ pak musí pro každé u_n být $f(u_n) \geq f(u_0) > 0$, dokud $u_n \in (-2, -1\rangle$, anebo $f(u_n) > 1$, jakmile $u_n \in (-1, 0)$. Každopádně označíme-li $c = \min(1, f(u_0)) = \min(1, f(k))$, což je kladné číslo, máme

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) \geq c$$

pro každé n. Z toho už se vzhledem k $u_0 > -2$ musí pro $m \geq \frac{2}{c}$ platit

$$u_m = u_0 + \sum_{i=1}^{m}(u_i - u_{i-1}) > -2 + m \cdot c \geq -2 + \frac{2}{c} \cdot c = 0,$$

což je spor s předpokladem.

V posloupnosti se tedy vyskytne nezáporný člen. Nechť je n nejmenší číslo takové, že $u_n \geq 0$. Pak můžeme položit $P(x) = x^{2^{n+1}} + u_n x^{2^n} + 1$ a

$$Q(x) = \left(x^2 - u_0 x + 1\right) \cdots \left(x^{2^n} - u_{n-1}x^{2^{n-1}} + 1\right),$$

což je součin polynomů s nezápornými koeficienty, takže i jeho koeficienty musí být nezáporné.

(Matěj Doležálek)

Úloha N6. *Pepa má na tabuli napísanú dvojicu čísel $\frac{m}{n}$ a $\frac{n}{m}$, kde m, n sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Po chvíli snaženia našiel fixky, ktorými na tabuľu môže písať. V každom kroku môže zvoliť čísla x, y napísané na tabuli a pripísať k nim ich aritmetický priemer $\frac{x+y}{2}$ alebo ich harmonický priemer $\frac{2xy}{x+y}$. Nájdite všetky usporiadané dvojice (m, n), pre ktoré Pepa dokáže v konečne veľa krokoch napísať na tabuľu číslo 1.*

Riešenie. Ukážeme, že Pepa dokáže na tabuľu napísať číslo 1 práve vtedy, keď m a n sú nesúdeliteľné prirodzené čísla a súčet $m + n$ je mocninou dvoch. Nesúdeliteľnosť m a n je vynútená priamo zadaním.

Najskôr ukážeme, že ak súčet $m + n$ mocninou dvoch nie je, číslo 1 sa na tabuli objaviť nemôže. V tomto prípade teda existuje nepárne prvočíslo p, ktoré delí $m+n$. Indukciou dokážeme, že p bude deliť súčet čitateľa a menovateľa základného tvaru akéhokoľvek zlomku, ktorý sa na tabuli objaví.

Keďže m a n sú nesúdeliteľné, zlomky $\frac{m}{n}$ a $\frac{n}{m}$ sú v základnom tvare a platí pre ne $p \mid m+n$ (je to priamo naším predpokladom).

Majme teraz na tabuli nejaké dva zlomky $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ v základnom tvare také, že $p \mid a+b$ a $p \mid c+d$. Potom ich aritmetický priemer je

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2} = \frac{ad+bc}{2bd}.$$

Pre tento zlomok platí, že $p \mid (ad+bc)+2bd = d(a+b)+b(c+d)$. Toto síce nemusí byť základný tvar zlomku, aby však súčet jeho čitateľa a menovateľa prestal byť deliteľný p, musel by sa dať zlomok vykrátiť p (alebo jeho násobkom). Krátenie inými číslami nemá na deliteľnosť p vplyv. To by znamenalo, že $p \mid 2bd$. Vieme, že p je nepárne, nedelí teda dvojku, BUNV nech $p \mid b$. Ďalej z predpokladu vieme, že $p \mid a+b$, takže $p \mid a$. To je ale spor s tým, že $\frac{a}{b}$ je zlomok v základnom tvare. Ak $p \mid d$, dôkaz funguje analogicky.

Pozrime sa ešte na harmonický priemer zlomkov $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$, ten je

$$\frac{\frac{2ac}{bd}}{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}} = \frac{\frac{2ac}{bd}}{\frac{ad+bc}{bd}} = \frac{2ac}{ad+bc}.$$

Pokračovať budeme podobne ako v predošlom prípade. Platí $p \mid 2ac+(ad+bc) = a(c+d)+c(a+b)$. Ak by sa dal zlomok krátiť p, muselo by platiť $p \mid 2ac$, BUNV nech $p \mid a$. Potom z $p \mid a+b$ máme $p \mid b$, čo je opäť spor s tým, že $\frac{a}{b}$ je v základnom tvare.

Skutočne teda platí, že všetky zlomky na tabuli budú mať súčet čitateľa a menovateľa deliteľný p, pretože ak máme len zlomky spĺňajúce túto vlastnosť, vieme vytvoriť iba zlomky, ktoré túto vlastnosť majú tiež. Číslo 1 je zlomok v základnom tvare $\frac{1}{1}$, muselo by teda platiť $p \mid 1+1=2$, čo pre nepárne p nastať nemôže.

Ostáva ukázať, že v prípade $m+n=2^k$ vieme číslo 1 na tabuľu dostať. Indukciou podľa g dokážeme, že vieme získať ľubovoľný zlomok tvaru

$$\frac{xm^2+yn^2}{2^g mn}$$

kde $x+y=2^g$, g je prirodzené a x, y sú nepárne prirodzené čísla. Pre $g=1$ musíme mať $x=y=1$ a chceme získať $\frac{m^2+n^2}{2mn}$. To je aritmetický priemer dvoch počiatočných čísel.

Ďalej predpokladajme, že vieme získať zlomky pre všetky možné dvojice x_0, y_0 so súčtom 2^{g-1}, a poďme zostrojiť zlomok pre x, y so súčtom 2^g, $g \geq 2$. Jedno z x, y musí byť väčšie ako 2^{g-1}, BUNV nech je to x. Položme teraz $x_0 = x-2^{g-1}$, $y_0=y$ a urobme aritmetický priemer čísel

$$\frac{\frac{x_0m^2+y_0n^2}{2^{g-1}mn}+\frac{m}{n}}{2} = \frac{\frac{x_0m^2+y_0n^2}{2^{g-1}mn}+\frac{2^{g-1}m^2}{2^{g-1}mn}}{2} = \frac{(x_0+2^{g-1})m^2+y_0n^2}{2^g mn} = \frac{xm^2+yn^2}{2^g mn}.$$

Tým je indukčný krok hotový. Teraz vieme, že m a n sú nesúdeliteľné a majú párny súčet – mocninu 2 väčšiu alebo rovnú 2^1, takže sú obe nepárne. Napokon stačí zvoliť $x=n$, $y=m$, čím dostaneme želaný výsledok

$$\frac{nm^2+mn^2}{2^k mn} = \frac{(m+n)mn}{(m+n)mn} = 1.$$

(Michal Staník)

Úloha C6. *Rado stojí v bode $x = 1$ reálnej osi. Vždy, keď sa nachádza v bode $x = a$, môže v jednom kroku preskočiť podľa svojho výberu buď do bodu $x = a + 2$, alebo do bodu $x = \frac{a}{2}$. V každom bode, ktorý Rado navštívi (vrátane bodu $x = 1$), zanechá svoju značku. Dokážte, že počet všetkých bodov, v ktorých sa po n krokoch môže nachádzať Radova značka (nie nutne po tej istej postupnosti skokov), je $F_{n+5} - (n + 4)$, kde $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť* Fibonacciho čísel *definovaná vzťahmi $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre $n \geq 0$.*

Riešenie. Posloupnost možných Radových skoků zaznamenáme jako řetězec nad abecedou $\{\texttt{+}, \texttt{/}\}$ délky nejvýše n, přičemž + značí skok $x \to x + 2$, zatímco / značí skok $x \to \frac{x}{2}$. Když dále budeme mluvit o řetězcích, budeme tím myslet právě tyto řetězce. Každý řetězec potom kóduje místo, kam Rado doskáče.

Prvně učiníme pozorování, že můžeme vynechat všechny řetězce, které obsahují podřetězec `++/`. Takový podřetězec bychom totiž mohli nahradit řetězcem `/+` a Rado by po obou sekvencích doskákal do stejného místa, jelikož $\frac{a+2+2}{2} = \frac{a}{2} + 2$.

Dále tedy uvažujme jen ty řetězce, které neobsahují podřetězec `++/`. Teď ukážeme, že pokud máme za tohoto předpokladu dva různé řetězce $\mathtt{s}_1$, $\mathtt{s}_2$, pak kódují jiné místo. Nejprve vyslovíme tři jednoduchá lemmata.

Lemma 1. *Pokud řetězec* `s` *kóduje bod $x < 2$, pak*[1] `s+/` *i* `s/` *kódují bod $y < 2$.*

Dôkaz. Vzhledem k $x < 2$ platí $\frac{x}{2} < \frac{x+2}{2} < 2$. □

Lemma 2. *Pokud řetězec* `s` *končí na* `/`*, pak kóduje bod $x < 2$.*

Dôkaz. Postupováním od konce můžeme řetězec `s` složit z řetězců `+/` a `/`. Na začátku je Rado v bodě 1. Zbytek plyne z opakované aplikace lemmatu 1. □

Lemma 3. *Žádný neprázdný řetězec nekóduje* 1.

Dôkaz. Pro spor nechť nějaký neprázdný řetězec kóduje 1. Pokud by tento řetězec obsahoval `/`, kódoval by číslo, které není celé, protože čitatelé zůstávají během celého procesu liší. Naopak kdyby neobsahoval `/`, kódoval by číslo $x > 1$. □

Teď už můžeme dokázat předestřené tvrzení.

Tvrdenie 1. *Dva různé řetězce neobsahující* `++/` *kódují různé body.*

Dôkaz. Dokážeme sporem, vezměme $\mathtt{s}_1$, $\mathtt{s}_2$, které jsou různé, ale kódují stejný bod. Navíc zvolme takovou dvojici řetězců, která má mezi všemi dvojicemi s těmito vlastnostmi nejmenší součet délek. Z lemmatu 3 plyne, že oba řetězce musí být neprázdné.

Jsou dvě možnosti: buď oba řetězce končí na stejný znak, nebo končí na různé znaky. Jsou-li koncově znaky stejné, pak je můžeme o ten znak zkrátit a vzniklá dvojice bude opět různá a bude kódovat stejný bod. To by byl spor, jelikož by $\mathtt{s}_1$, $\mathtt{s}_2$ nebyla dvojice s nejmenším součtem délek.

Řetězce tak končí na různé znaky. Potom ale ten končící na `+` kóduje číslo $x > 2$, zatímco ten končící na `/` kóduje podle lemmatu 2 číslo $y < 2$, což je spor. □

Zbývá nám spočítat, kolik je řetězců délky nejvýše n, které neobsahují podřetězec `++/`. Zaveďme proto množiny

$$\begin{aligned}
\Sigma_n &= \{\mathtt{s} \mid \mathtt{s} \in \{\mathtt{+}, \mathtt{/}\}^n, \mathtt{++/} \text{ není v } \mathtt{s}\},\\
A_n &= \{\mathtt{s} \mid \mathtt{s} \in \Sigma_n, \text{ a } \mathtt{s} \text{ končí na } \mathtt{++}\},\\
B_n &= \{\mathtt{s} \mid \mathtt{s} \in \Sigma_n \setminus A_n \text{ a } \mathtt{s} \text{ končí na } \mathtt{+}\},\\
C_n &= \{\mathtt{s} \mid \mathtt{s} \in \Sigma_n, \text{ a } \mathtt{s} \text{ končí na } \mathtt{/}\}.
\end{aligned}$$

[1] Následující notací míníme připojení znaků na konec řetězce.

Všimněme si že A_n, B_n, C_n jsou po dvou disjunktní a že jejich sjednocení je Σ_n. Počet řetězců délky n označíme $P_n = |\Sigma_n| = |A_n| + |B_n| + |C_n|$. Snadno také vymyslíme vztahy

$$\begin{aligned}|A_n| &= |A_{n-1}| + |B_{n-1}|,\\ |B_n| &= |C_{n-1}|,\\ |C_n| &= |C_{n-1}| + |B_{n-1}|,\end{aligned}$$

z nichž dále odvodíme

$$\begin{aligned}|A_n| &= |A_{n-1}| + |B_{n-1}| = |A_{n-2}| + |B_{n-2}| + |C_{n-2}| = P_{n-2},\\ P_n &= P_{n-1} + |C_n| = P_{n-1} + |C_{n-1}| + |B_{n-1}| =\\ &= 2P_{n-1} - |A_{n-1}| = 2P_{n-1} - P_{n-3}.\end{aligned}$$

Chceme dokázat $\sum_{i=0}^{n} P_i = F_{n+5} - (n+4)$. Pro $n = 0$ je levá strana rovna 1 a pravá $F_5 - 4 = 5 - 4 = 1$, takže dokazovaná rovnost platí. Dále stačí pro $n \geq 1$ dokázat rovnost diferencí těchto posloupností, tedy

$$P_n = \sum_{i=0}^{n} P_i - \sum_{i=0}^{n-1} P_i = \Big(F_{n+5} - (n+4)\Big) - \Big(F_{n+4} - (n+3)\Big) = F_{n+3} - 1,$$

což dokážeme silnou indukcí. Základní případy jsou

$$\begin{aligned}P_0 &= 1 = 2 - 1 = F_3 - 1,\\ P_1 &= 2 = 3 - 1 = F_4 - 1,\\ P_2 &= 4 = 5 - 1 = F_5 - 1,\end{aligned}$$

což sedí. Dále předpokládejme, že $P_n = F_{n+3} - 1$ platí pro všechna $n \leq k$. Potom dostaneme

$$\begin{aligned}P_{k+1} &= 2P_k - P_{k-2} = 2(F_{k+3} - 1) - (F_{k+1} - 1) =\\ &= 2F_{k+3} - F_{k+1} - 1 = F_{k+3} + (F_{k+4} - F_{k+2}) - F_{k+1} - 1 =\\ &= F_{k+4} + F_{k+3} - (F_{k+2} + F_{k+1}) - 1 = F_{k+4} + F_{k+3} - F_{k+3} - 1 =\\ &= F_{k+4} - 1.\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. *(Vašek Voráček)*