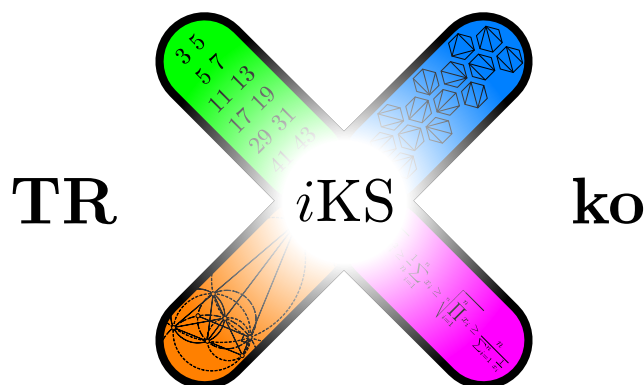




Úloha 1. V ostrouhlom trojuholníku $\triangle ABC$, $AB < AC < BC$ uvážme A_1, B_1, C_1 päty výšok z A, B, C na protiľahlé strany. Nech obraz bodu B_1 v osovej súmernosti podľa CC_1 je bod Q a obraz bodu C_1 podľa BB_1 je bod P . Dokážte, že kružnica opísaná A_1PQ prechádza stredom BC .

Řešení. Nehc M je stred BC . BB_1 je os uhla $\angle A_1B_1C_1$ teda $P \in A_1B_1$ a analogicky $Q \in A_1C_1$. Vieme, že $MB_1 = MC_1$ a $M \in (A_1B_1C_1)$ a ďalej aj $B_1P = B_1C_1 = C_1Q$. Teda máme, že $\triangle MBQ_1 \cong \triangle MC_1P$ z čoho plynie dokazované tvrdenie. $\square$

Úloha 2. Staroveké Jednorozmerné cisárstvo sa rozprestieralo pozdĺž jednej priamky. Na začiatku neexistovali žiadne mestá. Postupne bolo po jednom založených celkom n rôznych bodových miest; počnúc druhým mestom sa každé novozaložené mesto a k nemu najbližšie už existujúce mesto (ak boli také dve, tak to staršie) vyhlásili za sesterské mestá. Na zachovanej mape cisárstva sú viditeľné mestá a vzdialenosti medzi nimi, nie však poradie ich založenia. Historici sa z mapy snažia vyvodit' záver, že každé mesto malo najviac 41 sesterských miest.

1. Pre $n = 10^6$ nájdite takú mapu, z ktorej je možné tento záver vyvodit'.
2. Dokážte, že pre $n = 10^{13}$ tento záver nemožno vyvodit' zo žiadnej mapy.

Řešení. Tento postup funguje nielen pre 10^6 , ale aj pre ľubovoľný počet bodov $m \leq 2^{20}$. Nech $m \leq 2^{20}$. Vezmime m bodov na priamke, ktoré sú od seba v jednotkovej vzdialenosti. Predpokladajme, že pri nejakom číslovaní je bod p_i koncovým bodom aspoň 42 úsečiek. Druhé koncové body týchto úsečiek (susedia bodu p_i) zahŕňajú jeden bod, ktorý je k p_i najbližší a má menší index. Pre ostatných aspoň 41 susedov je zas p_i tým najbližším bodom s menším indexom. Z nich sa aspoň 21 nachádza na jednej strane od bodu p_i . Nech sú to body $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}$, pričom $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ a $m \geq 21$. Keďže pre všetky z nich bol p_i najbližším susedom s menším indexom, poradie bodov na priamke je práve $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}, p_i$, a pre všetky $2 \leq j \leq m-1$ platí $|p_i p_{i_j}| \leq |p_i p_{i_{j-1}}|/2$. Teda $|p_i p_{i_{21}}| \leq |p_i p_{i_1}|/2^{20}$. To je však nemožné, pretože máme $m \leq 2^{20}$ bodov rovnomerne rozložených na číselnej osi, takže pomer najväčšej a najmenšej vzdialenosti je menší ako m .

Pre druhú časť, nech P je ľubovoľná neočíslovaná množina obsahujúca 10^{13} bodov. Najprv definujeme podmnožiny $P \supset P_0 \supset \dots \supset P_{42}$ a body $q_i \in P_i$. Nech P_0 je ľubovoľná podmnožina P s $2^{42} + 1$ prvkami a nech q_0 je jedným z jej krajných bodov. Ostatné body a podmnožiny definujeme rekurzívne. Predpokladajme, že $i < 42$, $|P_i| = 2^{42-i} + 1$ a q_i je jeden z krajných bodov P_i . Nech q_{i+1} je stredný

bod P_i . Bod q_{i+1} rozdelí P_i na dve podmnožiny s $2^{43-i} + 1$ bodmi (pričom q_{i+1} rátať do oboch častí). Nech P_{i+1} je tá z nich, ktorá má menší priemer, teda menšiu vzdialenosť medzi svojimi dvoma krajnými bodmi (v prípade rovnosti to môže byť hociktorá). Potom nech je poradie bodov nasledovné: $q_{42}, q_0, q_1, \dots, q_{41}$, a následne ostatné body v ľubovoľnom poradí. To znamená, že nech $p_1 = q_{42}$, pre $2 \leq i \leq 43$ nech $p_i = q_{i-2}$ a ďalšie body v ľubovoľnom poradí.

Tvrdíme, že $q_{42} = p_1$ bude spojený s bodmi $q_0 = p_2, q_1 = p_3, \dots, q_{41} = p_{43}$. Nech $0 \leq j < i \leq 41$. Keďže $|q_i q_{42}| < |q_i q_{i-1}| \leq |q_i q_j|$, čiže $|p_{i+2} p_1| < |p_{i+2} p_{j+2}|$, preto pre všetky $2 \leq i \leq 43$ je k bodu p_i zo všetkých bodov s menším indexom než i najbližšie bod p_1 . To znamená, že p_1 je koncovým bodom aspoň 42 úsečiek. $\square$

Úloha 3. Nech p je prvočíslo a $H \subseteq \{0, 1, \dots, p-1\}$ je neprázdna množina. Predpokladajme, že ku každému prvku $a \in H$ existujú od a rôzne prvky $b \in H$ a $c \in H$, pre ktoré je výraz $b + c - 2a$ deliteľný p . Dokážte, že $p < 4^k$, kde k označuje počet prvkov množiny H .

Řešení. Uvažujeme všetky operácie modulo p a zvyšky volíme vždy z intervalu $(-p/2, p/2)$. Ak množinu H zo zadania posunieme (t. j. ku každému jej prvku pripočítame rovnaký zvyšok), množina H bude mať aj naďalej požadovanú vlastnosť, preto môžeme predpokladať, že $0 \in H$. Ďalej môžeme každý jej prvok vynásobiť nenulovým zvyškom. Tvrdíme, že ak $p > 4^{k-1}$, takýmto spôsobom je možné dosiahnuť, aby všetky prvky z H padli do intervalu $(-p/4, p/4)$. Rozdeľme interval $(-p/2, p/2)$ na štyri rovnaké časti a pozrime sa, do ktorých častí padne $k-1$ nenulových prvkov, ak ich vynásobíme rôznymi zvyškami r . Podľa Dirichletovho princípu musia existovať rôzne čísla $r_1, r_2 \in \{0, 1, \dots, 4^{k-1}\}$ tak, že po vynásobení nimi pre každý prvok $0 \neq a \in H$ platí, že $r_1 a$ a $r_2 a$ spadajú do rovnakej časti. Z toho potom ľahko vidieť, že po vynásobení číslom $r = r_2 - r_1 \neq 0$ všetky prvky množiny padnú do intervalu $(-p/4, p/4)$. To je však spor, pretože k najväčšiemu prvku H by sme už určite nedokázali nájsť vyhovujúce prvky b, c . $\square$