

Riešenia 4. série

Úloha A4. Nech $n \geq 3$ je kladné celé číslo. Nájdite najväčšie reálne číslo t_n , také aby platila nerovnosť

$$\max(|a_1 + a_2|, |a_2 + a_3|, \dots, |a_{n-1} + a_n|, |a_n + a_1|) \geq t_n \cdot \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|)$$

pre všetky reálne čísla a_1, a_2, \dots, a_n .

Riešenie. Označme $S = \max_i(|a_i + a_{i+1}|)$ a $M = \max_i(|a_i|)$. Hľadáme najväčšie t_n , pre ktoré $S \geq t_n \cdot M$.

Pre párne n zvolíme postupnosť $a_k = (-1)^k$. Potom $a_k + a_{k+1} = 0$ pre všetky k , teda $S = 0$. Z nerovnosti $0 \geq t_n \cdot 1$ vyplýva $t_n = 0$.

Pre nepárne n ukážeme, že $t_n = \frac{2}{n}$.

Dolný odhad: BUNV Nech $M = |a_1|$, využijeme alternujúci súčet susedných súčtov. Keďže n je nepárne, platí:

$$2a_1 = (a_1 + a_2) - (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) - \dots + (a_n + a_1)$$

Aplikovaním trojuholníkovej nerovnosti dostávame:

$$2|a_1| \leq |a_1 + a_2| + |a_2 + a_3| + \dots + |a_n + a_1| \leq n \cdot S$$

Odtiaľ priamo vyplýva $S \geq \frac{2}{n}|a_1| = \frac{2}{n}M$. Čiže $t_n = \frac{2}{n}$ vyhovuje pre ľubovoľnú postupnosť nepárnej dĺžky.

Horný odhad (konštrukcia): Uvažujme postupnosť $a_k = (-1)^{k-1}(n - 2k + 2)$.

- Maximum nastáva pre $k = 1$, kde $|a_1| = n$, teda $M = n$
- Súčet susedov je konštantný: $|a_k + a_{k+1}| = |(-1)^{k-1} \cdot 2| = 2$
- Cyklický susedia: $|a_n + a_1| = |(2 - n) + n| = 2$

Pre túto postupnosť je $S = 2$ a $M = n$, čo dáva $S = \frac{2}{n} \cdot M$. Čiže t_n nemôže byť väčšie ako $\frac{2}{n}$.
Tým sme hotoví. (Roland Vízner)

Úloha N4. Nech $a_1 < a_2 < \dots < a_{2025}$ je aritmetická postupnosť kladných celých čísel a $b_1 < b_2 < \dots < b_{2025}$ je geometrická postupnosť kladných celých čísel. Nájdite maximálny možný počet spoločných prvkov oboch postupností, vrámci všetkých dvojíc takýchto postupností.

Riešenie. Predpokladajme bez ujmy na všeobecnosti, že $b_1 = m^k$ a $b_{k+1} = n^k$ sú prvý a posledný prvok množiny b , ktoré sú obsiahnuté v množine a .

Nech b_{x_1}, \dots, b_{x_r} sú prvky b , ktoré sú v a . Predpokladajme bez ujmy na všeobecnosti, že $\gcd(x_1, \dots, x_r) = 1$. Potom spoločný rozdiel d a delí $n - m$. Takže

$$\begin{aligned} b_{k+1} - b_1 &\leq 2023d \\ m^k - n^k &\leq 2023(m - n) \\ m^{k-1} + m^{k-2}n + \dots + n^{k-1} &\leq 2023 \end{aligned}$$

$$1 + \dots + 2^{k-1} \leq 2023$$

$$k \leq 10$$

$$k + 1 \leq 11.$$

Preto existuje najviac 11 spoločných prvkov medzi týmito dvoma postupnosťami. To sa dosiahne, keď $a_i = i$ a $b_i = 2^{i-1}$.

(Jakub Krivošík)

Úloha G4. Daný je rôznostranný trojuholník ABC s výškami AD, BE, CF . Nech O je stred kružnice jemu opísanej. Kružnice opísané trojuholníkom ABC a ADO sa pretínajú v bode $P \neq A$. Priamka PE pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode $X \neq P$ a PF v bode $Y \neq P$. Dokážte, že $XY \parallel BC$.

Riešenie. Nech $ABCA'$ je rovnoramenný lichobežník, pre ktorý platí, že $\overline{AA'} \parallel \overline{BC}$.

Potom P, H, A' ležia na jednej priamke.

Preklopte bod O v osovej súmernosti podľa strednej priečky rovnobežnej s BC v $\triangle ABC$, čím získame bod G . Potom platí $AH = 2OM$, kde M je stred priamky \overline{BC} ; z toho vyplýva, že body H, G, A' ležia na jednej priamke. Predefinujme P ako $P \stackrel{\text{def}}{=} \overline{GH} \cap \odot(ABC)$ s $P \neq A'$. Potom $\angle APG = \angle OAD = \angle ADG$, teda $ADGP$ sú tetivové.

Teraz si všimnime, že $\overline{PA}, \overline{PH}$ sú izogonálne v uhle BPC . Použijeme isogonal lemmu a dostaneme, že $\overline{PE}, \overline{PF}$ sú izogonálne v uhle BPC a máme hotovo! (David Hromádka)

Úloha C4. Pre každé kladné reálne číslo ε dokážte, že existuje kladné celé číslo M , že každý graf s $n > M$ vrcholmi a aspoň $(1 + \varepsilon)n$ hranami má dva rôzne cykly rovnakej dĺžky.

Riešenie. Ukážeme, že každý graf s aspoň $(\lceil \sqrt{n} \rceil + 1)^2$ hranami obsahuje 2 rôzne cykly rovnakej dĺžky. Z čoho plynie dokazované tvrdenie. Predpokladajme, že graf G má E hrán a žiadne opakované dĺžky cyklov. Potom tvrdím, že existuje podmnožina A s maximálne $2\sqrt{E}$ hranami, ktorá pretína každý cyklus. Nech B je podmnožina hrán. Nech $f(B)$ je počet cyklov, ktoré nepretínajú B , potom vieme nájsť množinu obsahujúcu $|B| + f(B)$ hrán, ktorá pretína všetky cykly.

Vyberme B náhodne, tak že každú hranu vyberieme nezávisle s pravdepodobnosťou $\frac{1}{\sqrt{E}}$.

Potom $\mathbb{E}[|B| + f(B)] = \mathbb{E}[|B|] + \mathbb{E}[f(B)]$. Stredná hodnota veľkosti B je práve \sqrt{E} a stredná hodnota $f(B)$ je súčet pravdepodobností, že cyklus neobsahuje žiadny prvok z B , cez všetky cykly. Táto pravdepodobnosť je práve $(1 - \frac{1}{\sqrt{E}})^k$ pre cyklus dĺžky k . Kľúčovým faktom je potom to, že sa žiadna dĺžka cyklu neopakuje, takže $\mathbb{E}[f(B)] \leq \sum_{k=3}^{\infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{E}})^k$, čo je podľa geometrického radu najviac \sqrt{E} , čo dáva požadovaný výsledok.

Ak odstránime túto množinu hrán, prerušíme všetky cykly a zostávajúci graf bude mať najviac $n - 1$ hrán, takže pôvodný graf mal najviac $n - 1 + 2\sqrt{E}$ hrán, čo znamená, že $E \leq n - 1 + 2\sqrt{E}$, čo implikuje požadovanú nerovnosť.

(Andrej Znamenáček)