Zadania 2. série

Termín odoslania: 5. jún 2017

Adresa: *KMS – iKS*
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovakia

Úloha N2. Hovoríme, že nekonečná rastúca postupnosť prirodzených čísel $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ je *čarovná*, ak pre všetky n platí $a_{2n} = 2a_n$. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

a) Ak máme danú čarovnú postupnosť a prvočíslo $p > a_1$, tak existuje člen postupnosti, ktorý je deliteľný p.

b) Pre každé prvočíslo $p > 2$, existuje čarovná postupnosť, ktorej žiaden člen nie je deliteľný p.

Úloha C2. Vo vrecúšku je n bielych a n čiernych loptičiek, ktoré sú očíslované číslami od 1 do $2n$ (každé je použité práve raz). Hráme nasledujúcu hru: V každom ťahu vyberieme (náhodne) jednu loptičku z vrecúška a umiestnime ju na stôl pred sebou. Potom, ak chceme, môžeme zobrať zo stola jednu čiernu a jednu bielu loptičku a vyhodiť ich do koša. Za to získame počet bodov, ktorý je rovný absolútnej hodnote rozdielu čísel na týchto dvoch loptičkách. V každom ťahu môžeme zahodiť najviac jednu dvojicu loptičiek. Nájdite najväčší možný počet bodov (v závislosti od n), ktorý môžeme s istotou získať po $2n$ ťahoch bez ohľadu na to, aké loptičky ťaháme a ako sú očíslované.

Úloha A2. Nech n je dané prirodzené číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1, \dots, n\}$. Pre prirodzené číslo j $(1 \le j \le n)$, definujeme b_j ako počet takých indexov i, že $a_i \ge j$. Napríklad, ak $n = 3$ a $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, potom $b_1 = 3$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$. Dokážte, že pre všetky prirodzené k platí:

$$\sum_{i=1}^{n} (i + a_i)^k \ge \sum_{i=1}^{n} (i + b_i)^k.$$

Úloha G2. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Nech E, F ležia na stranách AC, AB, pri čom ich vzdialenosť od stredu BC je rovnaká. Nech $P \ne A$ je druhý priesečník kružníc opísaným trojuholníkom ABC, AEF. Dotyčnice v bodoch E, F k opísanej kružnici trojuholníka AEF sa pretínajú v bode K. Dokážte, že $|\sphericalangle KPA| = 90°$.