

Riešenia 2. série

Úloha G2. Na strane BC trojuholníka ABC leží bod D tak, že $|\angle DAB| = |\angle ACB|$. Nech bod E leží na úsečke AD , že spĺňa $|AB| = 2|BE|$. Na polpriamke opačnej k polpriamke DA leží bod F tak, že $|\angle BFA| = |\angle EBC|$. Dokážte, že priamka BE sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku CDF .

Riešenie. Ze zadaných shodností úhlů plyne, že úhel BAD je úsekový úhel príslušející obvodovému úhlu ACD kružnice (ADC) . Tudiž priamka AB je tečnou ke kružnici (ADC) . Analogicky priamka BE je tečnou ke kružnici (BDF) . Zobražíme B ve středové souměrnosti podle E na bod T . Pak zřejmě platí: $|ET| = |EB|$ a $|BT| = |AB|$. Z toho vyplývají mocnosti:

$$|AB|^2 = |BD| \cdot |BC| \implies |TB|^2 = |BD| \cdot |BC|,$$

$$|EB|^2 = |ED| \cdot |EF| \implies |ET|^2 = |ED| \cdot |EF|.$$

Jelikož mocnost platí ekvivalentně, přímka TB je nyní nutně tečnou ke kružnici (TDC) . Zároveň tatáž přímka TE je tečnou ke kružnici (TDF) . Střed obou těchto kružnic nutně leží na kolmici k TB v bodě T a zároveň na ose úsečky TD . Protože D zřejmě neleží na TB , existuje právě jeden takový průsečík. Obě zmíněné kružnice jsou tedy soustředné a navíc se stejným poloměrem – vzdálenost od bodu T . To znamená, že jsou totožné. Tím pádem T leží na kružnici opsané trojúhelníku CDF , přičemž přímka BE (na níž T leží) je k této kružnici tečna. Tímto jsme úlohu dokázali.

(Lucian Poljak)

Úloha N2. Najdite všetky prirodzené čísla n , pre ktoré existuje **párne** prirodzené číslo a také, že výraz

$$(a-1)(a^2-1)(a^3-1)\dots(a^n-1)$$

je druhou mocninou prirodzeného čísla.

Riešenie. Správna odpoveď je $n \in \{1, 2\}$.

Myšlienka riešenia je, že pro každé sudé a a pro každé přirozené l je $a^{(2^l)} + 1$ nesoudělné s $a^k - 1$ pro $k < 2^{l+1}$. Dá se to říct přes řády. Pokud $p \mid a^{(2^l)} + 1$ a $p \mid a^k - 1$, tak $p \mid a^{(2^{l+1})} - 1$, z čehož plyne, že $\text{ord}_p(a)$ je mocnina dvojky. Kdyby to ale bylo menší než 2^{l+1} , tak by $a^{(2^l)}$ bylo kongruentní 1 mod p , což je spor, neboť $p \neq 2$ díky sudosti a a $1 \not\equiv -1 \pmod{p}$. Pak tedy k musí být násobkem 2^{l+1} , z čehož už tvrzení plyne.

Pro dané $n \geq 4$ nyní uvažujeme $s \geq 1$ tak, že $2^{s+1} \leq n$, ale $2^{s+2} > n$, což zřejmě lze. Najdeme prvočíslo p takové, že $p \mid a^{(2^s)} + 1$ a zároveň

$$v_p((a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)) \equiv 1 \pmod{2},$$

což už řekne, že se nejedná o čtverec. Protože $s \geq 1$, platí, že $a^{(2^s)} + 1$ není čtverec. Kdyby bylo, tak platí $a^{(2^s)} + 1 = m^2$ pro nějaké m . Tedy $m^2 - a^{(2^s)} = 1$. Díky $s \geq 1$ je $a^{(2^s)}$ čtverec. Dva čtverce se liší o 1, právě když je to 1 a 0, takže už nutně $a = 0$, spor. Proto je $a^{(2^s)} + 1$ liché, musí existovat liché prvočíslo p takové, že $v_p(a^{(2^s)} + 1)$ je liché. Když se podíváme na

$$v_p((a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1))$$

a uvědomíme si, že pokud $p \mid a^{(2^s)} + 1$ a zároveň $p \mid a^k - 1$, tak $2^{s+1} \mid k$, už z toho plyne, že ze všech členů $a^i - 1$ se může p objevit jen v $a^{(2^{s+1})} - 1$. Ale

$$v_p(a^{(2^{s+1})} - 1) = v_p(a^{(2^s)} + 1) + v_p(a^{(2^s)} - 1).$$

Kdyby $p \mid a^{(2^s)} - 1$, tak $p = 2$, protože $p \mid a^{(2^s)} + 1$. To je spor. Takže

$$v_p((a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)) = v_p(a^{(2^{s+1})} - 1) = v_p(a^{(2^s)} + 1) \equiv 1 \pmod{2},$$

jak jsme chtěli ukázat. Zbývá vyřešiť $n \leq 3$. Pro $n = 1$ vyhovuje $a = 2$, pro $n = 2$ vyhovuje $a = 8$. Pro $n = 3$ získame cyklotomickým rozkladom

$$(a-1)(a^2-1)(a^3-1) = (a-1)^3(a+1)(a^2+a+1).$$

Jenže $\gcd(a^2+a+1, a+1) = 1$ a $\gcd(a+1, a-1) = 1$, neboť a je sudé. Také $a+1$ je čtverec. Dále

$$\gcd(a^2+a+1, a-1) \in \{1, 3\}.$$

Aby to ale bylo 3, tak by a muselo mít zbytek 1 (mod 3), takže $a+1$ by mělo zbytek 2 (mod 3) a nebyl by to čtverec. Proto i

$$\gcd(a^2+a+1, a-1) = 1.$$

Takže i a^2+a+1 je čtverec, což je spor, neboť

$$a^2 < a^2+a+1 < a^2+2a+1 = (a+1)^2.$$

(Alexis Théodore Dachary)

Úloha A2. Nech $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots$ je nekonečná postupnosť reálnych čísel z intervalu $(0, 1)$. Ukážte, že existuje číslo, ktoré sa v postupnosti

$$\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \frac{a_4}{4}, \dots$$

vyskytuje práve raz.

Riešenie. (Podľa Lukáša Komína) Všimnime si najprv, že každé reálne číslo sa v postupnosti vyskytne nanajvýš konečne veľa krát. Naozaj, ak by existovalo nekonečne veľa n takých, že $a_n/n = r$ pre nejaké fixné r , tak potom $nr = a_n$ bude od nejakého momentu väčšie ako 1, spor.

Môžeme preto definovať postupnosť celých čísel čísel $0 = c_0 < c_1 < c_2 < \dots$ tak, že pre $n \geq 1$ je $\frac{a_{c_n}}{c_n}$ posledný výskyt hodnoty $\frac{a_{c_{n-1}+1}}{c_{n-1}+1}$ v postupnosti $(\frac{a_n}{n})_{n=1}^\infty$. Ak predpokladáme opak zadania, tak dostávame, že $c_n \geq c_{n-1} + 2$, a teda dostávame odhad $c_n \geq 2n$.

Teraz indukciou ukážeme, že pre $n \geq 1$ platí

$$a_{c_n} \geq c_n \cdot \frac{c_{n-1}}{c_{n-1}+1} \dots \frac{c_1}{c_1+1} \cdot a_1.$$

Pre $n = 1$ chceme ukázať $a_{c_1} \geq c_1 a_1$, čo platí z definície c_1 (nastáva dokonca rovnosť). Pre indukčný krok si všimnime

$$\begin{aligned} a_{c_{n+1}} &= c_{n+1} \cdot \frac{a_{c_n+1}}{c_n+1} > \frac{c_{n+1}}{c_n+1} a_{c_n} \geq \frac{c_{n+1}}{c_n+1} \cdot c_n \cdot \frac{c_{n-1}}{c_{n-1}+1} \dots \frac{c_1}{c_1+1} \cdot a_1 = \\ &= c_{n+1} \cdot \frac{c_n}{c_n+1} \dots \frac{c_1}{c_1+1} \cdot a_1, \end{aligned}$$

pričom prvá rovnosť platí z definície $(c_n)_{n=0}^\infty$, následná nerovnosť platí z rastúcnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$, a posledná nerovnosť plynie z indukčného predpokladu.

Funkcia $\frac{x}{x+1}$ je na $(-1, \infty)$ rastúca ako sa presvedčíme ľahkým roznásobením, a teda platí

$$\begin{aligned} a_{c_n} &\geq 2n \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \dots \frac{2}{3} \cdot a_1 = \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n-2}{2n-3} \dots \frac{4}{3} \cdot 2a_1 = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) \left(1 + \frac{1}{2n-3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{1}\right) a_1 > \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) a_1, \end{aligned}$$

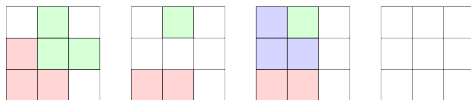
kde poslednú nerovnosť dostávame jednoduchým roznásobením zátvoriek. Je známe, že suma $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n-1}$ diverguje (vskutku, stačí si všimnúť, že suma je väčšia ako $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$), a teda pre dosť veľké n bude platiť $a_{c_n} > 1$, spor. (Dominik Rigasz)

Úloha C2. Nech $n \geq 2$ je celé číslo. Tabuľka $n \times n$ je na začiatku prázdna. V každom kroku je možné vykonať, jeden z nasledovných krokov:

1. Ak sa v tabuľke nachádza prázdna oblasť v tvare písmena L pozostávajúca z troch políčok (otáčanie a preklápanie nie je dovolené), tak na každé z týchto troch políčok môžeme umiestniť kameň.
2. Ak všetky políčka v niektorom riadku obsahujú kameň, môžeme všetky tieto kamene odstrániť.
3. Ak všetky políčka v niektorom stĺpci obsahujú kameň, môžeme všetky tieto kamene odstrániť.

Pre aké všetky n je možné, aby tabuľka bola po nenulovom počte krokov opäť prázdna?

Riešenie. Tvrdíme, že vyhovujú n deliteľné 3. Pre $n = 3$ postupnosť krokov je nasledovná



Pre ďalšie násobky trojky si rozdelíme tabuľku na 3×3 tabuľky a na každej vykonáme operácie ako na obrázku. Pre $3 \nmid n$ navážime tabuľku pomocou premenných a, b tak, že políčko (m, n) má váhu $a^m b^n$, pričom ľavé dolné políčko je $(0, 0)$ a pravé horné políčko je $(n-1, n-1)$. Vymazanie stĺpca k je potom odčítanie

$$a^k(1 + b + \dots + b^{n-1})$$

od súčtu váh políčok s kameňmi. Analogicky, vymazanie riadku k je potom odčítanie

$$b^k(1 + a + \dots + a^{n-1}).$$

Pridaním L -trinomína, ktorého ľavý dolný štvorček v (m, n) , sa pripočíta $(1 + a + b)a^m b^n$. Ak na konci je tabuľka prázdna tak následne platí

$$(1 + a + b)P(a, b) = (1 + b + \dots + b^{n-1})Q(a) + (1 + a + \dots + a^{n-1})R(b)$$

pre nenulové celočíselné polynómy P, Q, R , kde Q, R sú polynómy v jednej premennej so stupňom najviac n , ktoré odražajú ktoré riadky a stĺpce sme vymazali. $P(a, b)$ je polynóm v dvoch premenných so stupňom v a najviac $n-1$ a stupňom v b tiež najviac $n-1$, lebo nemôžeme umiestniť ľavý dolný roh L -trinomína do n -teho stĺpca ani n -teho riadku.

Nech ω je n -tá odmocnina z jednotky. Potom pre $r, s \in [0, n-1]$ a (ω^r, ω^s) je pravá strana nulová. Navyše, ak platí $1 + x + y = 0$, potom $x, y \in \mathbb{C}$ musia byť jednotkové vektory, ktoré tvoria strany rovnostranného trojuholníka, čo je nemožné, ak $3 \nmid n$.

Teda platí $P(\omega^r, \omega^s) = 0$ pre všetkých $(n-1)^2$ párov (r, s) . Keďže P má v a aj b stupeň najviac $n-1$. Položme $P(x, \omega^n)$ ako polynóm jednej premennej. Ten má stupeň najviac $n-2$, ale $n-1$ koreňov. teda je nulový polynóm. Teda P je nulový polynóm, čiže sme nepoložili žiadne trinomino, čo je spor.

(Adam Džavoronok)