Riešenia 4. série

Úloha A4. *Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí nerovnosť*

$$a\sqrt{b^2 - bc + c^2} + c\sqrt{a^2 - ab + b^2} \geq b\sqrt{a^2 + ac + c^2},$$

a určte, kedy nastáva rovnosť.

Riešenie. Chceme ukázať, že súčet dvoch odmocnín je väčší alebo rovný ako tretia odmocnina. To nám môže pripomínať trojuholníkovú nerovnosť. Trojuholníková nerovnosť hovorí, že keď máme dva vektory (môžeme si ich jednoducho predstaviť ako orientované úsečky) $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, tak veľkosť ich súčtu je menšia alebo rovná ako súčet ich veľkostí (priamy vektor nie je nikdy dlhší ako pohyb do toho istého bodu po dvoch vektoroch):

$$|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \geq |\mathbf{u} + \mathbf{v}|.$$

Keď si označíme zložky (súradnice) vektorov $\mathbf{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$, dostaneme

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} + \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \geq \sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 + (u_3 + v_3)^2}.$$

Podobne to platí aj pre iné dimenzie, ale ukáže sa, že v našej úlohe budú vhodné trojrozmerné vektory.

Dokazovanú nerovnosť upravíme tak, že premenné, ktoré pod odmocninou nie sú, do nej presunieme a aby sa nám lepšie upravovali výrazy pod odmocninami na štvorce, prenásobíme $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2a^2b^2 - 2a^2bc + 2a^2c^2} + \sqrt{2a^2c^2 - 2abc^2 + 2b^2c^2} \geq \sqrt{2a^2b^2 + 2ab^2c + 2b^2c^2}.$$

Výraz $2a^2bc$ vyzerá, že mohol vzniknúť ako $2(ab)(ac)$, nechceme totiž vyrobiť a^4 pod tou odmocninou. Podobne to vieme spraviť aj s ostatnými a upraviť si nerovnosť na:

$$\sqrt{(ab)^2 + (ab - ac)^2 + (ac)^2} + \sqrt{(ac)^2 + (bc - ac)^2 + (bc)^2} \geq \sqrt{(ab)^2 + (ab + bc)^2 + (bc)^2},$$
$$\sqrt{(ab - ac)^2 + (ab)^2 + (ac)^2} + \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (bc - ac)^2} \geq \sqrt{(ab)^2 + (ab + bc)^2 + (bc)^2}.$$

Po preusporiadaní členov to už je rovno trojuholníková nerovnosť pre vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (ab - ac,\ ab,\ ac), \\ \mathbf{v} &= (ac,\ bc,\ bc - ac), \\ \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (ab,\ ab + bc,\ bc). \end{aligned}$$

Ostáva určiť, kedy nastáva rovnosť. V trojuholníkovej nerovnosti nastáva práve vtedy, keď sú vektory lineárne závislé (jeden je násobkom druhého, teda majú rovnaký smer). Vďaka kladnosti a, b, c môžeme nimi deliť a dostávame:

$$\frac{ab - ac}{ac} = \frac{ab}{bc} = \frac{ac}{bc - ac},$$
$$\frac{b - c}{c} = \frac{a}{c} = \frac{a}{b - a},$$

Z prvej rvonosti máme $b - c = a$, z druhej $b - a = c$, obe sú splnené práve vtedy, keď $b = a + c$, čiže rovnosť v skúmanej nerovnosti nastáva práve vtedy, keď $b = a + c$.

Iné riešenie. Výrazy pod odmocninou nám môžu pripomínať výrazy v kosínusovej vete. Pre stranu a trojuholníka ABC platí, že $a = \sqrt{b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2}$. Pre $\alpha = 60^\circ$ máme kosínus rovný

$\frac{1}{2}$, teda výraz bude zhodný s prvou odmocninou v nerovnosti. Podobne to vieme spraviť, ak chceme dostať $\sqrt{a^2+ac+c^2}$, vtedy stačí zobrať uhol $120°$, ktorého kosínus je $-\frac{1}{2}$.

Uvažujme teda body A, B, C, D v rovine tak, že $|AB| = a$, $|AC| = b$, $|AD| = c$ a $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAD| = 60°$. Potom z kosínusovej vety platí:

$$\begin{aligned}|BC| &= \sqrt{a^2-ab+b^2},\\ |CD| &= \sqrt{b^2-bc+c^2},\\ |BD| &= \sqrt{a^2+ac+c^2}.\end{aligned}$$

Po dosadení do dokazovanej nerovnosti teda chceme ukázať, že:

$$|AB|\cdot|CD| + |AD|\cdot|BC| \geq |AC|\cdot|BD|.$$

Toto presne nám ale hovorí Ptolemaiova nerovnosť, ktorá platí pre všetky body v rovine. Vďaka nej teda platí aj dokazovaná nerovnosť.

Ešte potrebujeme zistiť, kedy nastáva rovnosť. S tým nám tiež pomôže Ptolemaiova veta. Je to práve vtedy, keď body A, B, C, D ležia na kružnici. Vtedy je uhol BCD doplnok k uhlu BAD do 180 stupňov, čiže máme $|\sphericalangle BAD| = 60°$. Z obvodových uhlov máme $|\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle DAC| = 60°$ a $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BAC| = 60°$, takže trojuholník BCD je rovnostranný. Z toho máme

$$\begin{aligned}|BC| &= |BD|,\\ \sqrt{a^2-ab+b^2} &= \sqrt{a^2+ac+c^2},\\ a^2-ab+b^2 &= a^2+ac+c^2,\\ b^2-c^2 &= ac+ab,\\ (b-c)(b+c) &= a(b+c),\\ b-c &= a,\\ b &= a+c.\end{aligned}$$

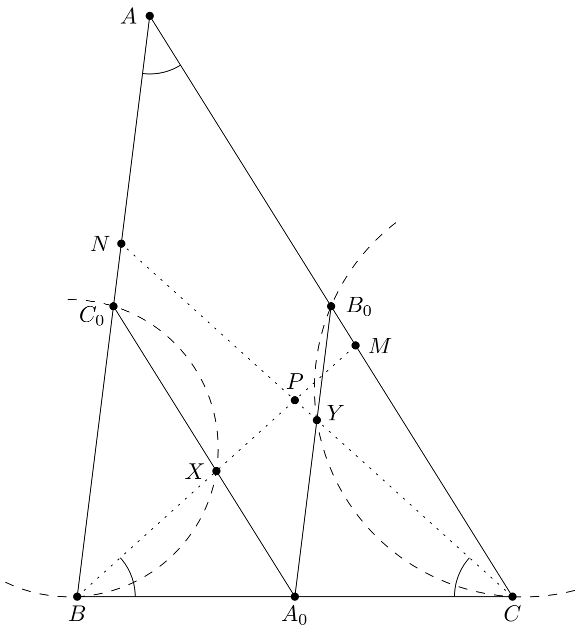
Umocnenie na druhú je v poriadku, pretože ide o dĺžky strán, ktoré sú kladné. Rovnosť nastáva v prípadoch, kedy $b = a+c$, čo overíme skúškou:

$$a\sqrt{(a+c)^2-(a+c)c+c^2} + c\sqrt{a^2-a(a+c)+(a+c)^2} =$$
$$= a\sqrt{a^2+ac+c^2} + c\sqrt{a^2+ac+c^2} = b\sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

(Michal Staník)

Úloha G4. *Vo vnútri trojuholníka ABC leží bod P spĺňajúci $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle BAC|$. Priamky BP, CP pretnú strany AC, AB postupne v bodoch M, N. Dokážte, že stredy úsečiek AB, AC, BM, CN ležia na jednej kružnici.*

Riešenie. Označme středy úseček BC, CA, AB, BM, CN po řadě A_0, B_0, C_0, X, Y. Nahlédněme nejprve, že body A_0, X, C_0 leží na jedné přímce. To plyne z toho, že se jedná o obrazy bodů C, M, A ve stejnolehlosti se středem v B a koeficientem $\frac{1}{2}$. Analogicky i Y leží na A_0B_0.



Díky $AC \parallel A_0C_0$ a zadání nyní

$$|\sphericalangle BC_0X| = |\sphericalangle BC_0A_0| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle XBA_0|,$$

takže z úsekového úhlu je A_0B tečna ke kružnici opsané BXC_0. Mocností bodu A_0 k této kružnici pak

$$|A_0X| \cdot |A_0C_0| = |A_0B|^2 = \frac{|BC|^2}{4}.$$

Analogicky je A_0C tečna ke kružnicí opsané CYB_0 a následně $|A_0Y| \cdot |A_0B_0| = \frac{|BC|^2}{4}$. Dohromady tak již

$$|A_0X| \cdot |A_0C_0| = \frac{|BC|^2}{4} = |A_0Y| \cdot |A_0B_0|,$$

takže mocností bodu A_0 leží X, Y, B_0, C_0 na jedné kružnici, jak se mělo dokázat.

Poznámky opravovateľa. Všechna došlá řešení byla správná. Většina postupovala podobně jako vzorák s pomocí středu BC, mnohá přitom byla formulována s pomocí podobností či sinových vět. Dvě řešení využila paty výšek – lze nahlédnout, že přímka XY protíná strany AB, AC právě v patách odpovídajících výšek. Našel se i jeden nešťastník, který se uchýlil k barycentrickým souřadnicím. *(Matěj Doležálek)*

Úloha N4. *Je daný nekonštantný polynóm P s celočíselnými koeficientami a celé číslo n. Postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ je daná predpisom $a_1 = n$ a $a_{i+1} = P(a_i)$ pre každé prirodzené číslo i. Navyše platí, že pre každé prirodzené $b \geq 2$ existujú prirodzené čísla i a $x > 1$ spĺňajúce $a_i = x^b$. Dokážte, že polynóm P je lineárny.*

Riešenie. Důkaz je nechán jako cvičení pro čtenáře.

Úloha C4. *Danilovi sa na záhrade pasie stádo niekoľkých roztomilých tuleňov, medzi ktorými sa niektoré dvojice kamarátia (kamarátstvo je vzájomné). Danil by chcel tulene rozdeliť na dve stáda (z ktorých jedno môže byť prázdne) tak, aby každý tuleň mal vo svojom novom stáde párny počet kamarátov. Dokážte, že počet spôsobov, ako to môže urobiť, je mocnina dvojky.*

Riešenie. Řešení bude obsahovat dvě části. V jedné části dokážeme, že existuje alespoň jeden způsob jak tuleně rozdělit, a v druhé dokážeme, že když už jedno rozdělení máme, tak jich je mocnina dvojky. Na úlohu se budeme dívat pomocí řeči teorie grafů, tedy tuleni jsou vrcholy a jsou spojeni hranou, právě když se kamarádí.

Existuje alespoň jedno rozdělení. Postupujme indukcí podle počtu vrcholů n. Pro $n = 1$ rozdělení existuje. Nyní pro obecný graf G na n vrcholech. Pokud mají všechny vrcholy sudý stupeň, tak je stačí všechny dát do jedné přihrádky, tedy rozdělení existuje. Jinak existuje vrchol v s lichým stupněm. Označme $\mathcal{K}$ množinu jeho sousedů. Sestrojíme nový graf G' tak, že odstraníme v a v množině $\mathcal{K}$ prohodíme hrany a nehrany. Z indukčního předpokladu máme v G' rozdělení na skupiny A a B. Označme $\mathcal{K}_A = A \cap \mathcal{K}$ a $\mathcal{K}_B = B \cap \mathcal{K}$, neboli rozdělení $\mathcal{K}$ do dvou skupin. Protože $|\mathcal{K}|$ je lichá, BÚNO $|\mathcal{K}_A|$ je sudé a $\mathcal{K}_B$ je liché. Nyní zkonstruujeme z rozdělení pro G' rozdělení pro G tak, že v $\mathcal{K}_A$ a v $\mathcal{K}_B$ prohodíme hrany a nehrany. Protože $|\mathcal{K}_A|$ je sudé, změnila se všem vrcholům v $\mathcal{K}_A$ parita stupně. Přidáme tedy do A i vrchol v, takže jsme znovu změnili paritu všech vrcholů v $\mathcal{K}_A$, takže všechny vrcholy v A mají nyní sudý stupeň. V $\mathcal{K}_B$ se parita stupně nezměnila, protože $|\mathcal{K}_B|$ je liché. Takže jsme nalezli rozdělení pro graf G.

Když už jedno rozdělení existuje, je jich mocnina dvojky. Rozdělme tuleně do jednoho platného rozdělení. Uvažme množinu vektorů $\{0,1\}^n$. Tyto vektory pro nás budou znamenat příkaz pro každého z n tuleňů. Pokud je na jeho místě nula, zůstane ve stádě kde byl, pokud je tam jednička, musí se přesunout do druhého stáda. Všimneme si, že tyto příkazy jednoznačně odpovídají různým rozdělením tuleňů do dvou (rozlišitelných) stád. Uvažme nyní množinu $\mathcal{M}$ příkazů, po kterých budeme mít stále platné rozdělení. Dokážeme, že $\mathcal{M}$ tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathbb{Z}_2^n$. Dokážeme tedy, že tato množina obsahuje identitu a je uzavřená na skládání.

Identita neboli příkaz $(0, 0, 0, \dots, 0)$ nechá všechny tuleně na místě, takže protože byli v platném rozdělení, tak identita patří do $\mathcal{M}$.

Skládáním rozumíme sčítání vektorů po složkách modulo 2. To je totéž jako provedení obou příkazů po sobě, protože pokud se tuleň přesunul dvakrát, je to jako by se nepřesunul. Nyní dokážeme, že složení dvou příkazů z $\mathcal{M}$ leží v $\mathcal{M}$. *(Radek Olšák)*