Zadání 5. série

Termín odeslání: 14. prosince 2026

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Email pro dotazy: `info@iksko.org`

Úloha N5. Nechť $a_1, a_2, \ldots$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel taková, že $a_i a_{i+1} - 1$ je druhá mocnina přirozeného čísla pro všechna přirozená čísla i. Dokažte, že $a_{46} \geq 2026$.

Úloha A5. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je posloupnost nezáporných celých čísel. Pro $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označme

$$m_k = \max_{1 \leq l \leq k} \frac{a_{k-l+1} + a_{k-l+2} + \cdots + a_k}{l}.$$

Dokažte, že pro každé $\alpha > 0$ je počet hodnot k splňujících $m_k > \alpha$ menší než $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\alpha}$.

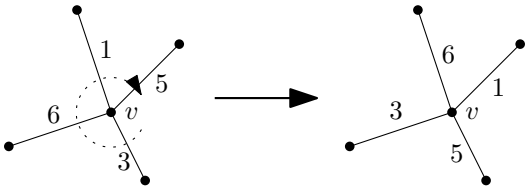
Úloha G5. V trojúhelníku ABC jsou dány body D, E, F po řadě na stranách BC, AC, AB tak, že

$$|BD| = |DE| = |EA| \qquad \text{a} \qquad |CD| = |DF| = |FA|.$$

Úsečky BE a CF se protnou v bodě P. Dokažte, že průsečík výšek trojúhelníku PEF leží na přímce BC.

Úloha C5. V rovině je dáno n bodů tak, že žádné tři neleží na jedné přímce. Tyto body jsou spojeny $n-1$ úsečkami s tím, že žádné dvě se neprotínají a je možné se po nich dostat mezi libovolnými dvěma zadanými body. Takovéto uskupení bodů a úseček mezi nimi nazveme *sítí*. V síti můžeme úsečky očíslovat různými přirozenými čísly 1 až $n-1$. S očíslovanou sítí můžeme dělat následující operaci:

Vybereme si bod v a protočíme očíslování všech úseček, které z v vycházejí, po směru hodinových ručiček. Formálně, ať $e_1, e_2, \ldots, e_k$ jsou úsečky obsahující v jako krajní bod, uspořádané podle směru hodinových ručiček. Poté současně pro pro všechna $1 \leq i \leq k$ nahradíme číslo úsečky e_{i+1} číslem úsečky e_i, kde $e_{k+1} = e_1$.



Síť nazveme *netriviální* pokud existují alespoň 2 body takové, že z každého vycházejí alespoň 2 úsečky. Nakonec o síti řekneme, že je *krejzy*, pokud z každého očíslování lze získat libovolné jiné očíslování po konečném počtu kroků. Najděte všechna $n \geq 5$ taková, že každá netriviální síť je krejzy.