Riešenie 3. série

Úloha G3. *V trojuholníku ABC body K, L ležia postupne na stranách AB, AC. Úsečky BL a CK sa pretínajú v bode P. Dokážte, že ak $|BC|^2 = |BK| \cdot |BA| + |CL| \cdot |CA|$, tak A, K, L, P ležia na jednej kružnici.*

Riešenie. Majme trojuholník ABC a vyhovujúce body K, L. Opíšme trojuholníku AKC kružnicu k. Tá pretne polpriamku BC ešte v bode X (rozmyslite si, prečo „polpriamku“). Z mocnosti B ku k dostávame $|BK||BA| = |BC||BX|$. Analogicky keď opíšeme kružnicu l trojuholníku ALB, dostaneme bod Y na polpriamke CB, pre ktorý platí $|CL||CA| = |CB||CY|$. Použitím získaných rovností a rovnosti v zadaní zjavne

$$|BC|(|BX| + |CY|) = |BC||BX| + |CB||CY| = |BK||BA| + |CL||CA| = |BC|^2.$$

Keďže $|BC|$ je nenulové číslo, $|BX| + |CY| = |BC|$, musí byť $X = Y$ (znova si uvedomte, kde sme využili špecifickú polohu bodov X, Y na polpriamkach). Na tetivové štvoruholníky $AKXC$ a $ALXB$ teraz nasadíme jednoduchý *angle chasing*.

$$|\sphericalangle AKP| + |\sphericalangle ALP| = |\sphericalangle AKC| + |\sphericalangle ALB| = |\sphericalangle AXC| + |\sphericalangle AXB| = 180^\circ.$$

Poznámky opravujúceho. K úlohe ste sa postavili veľmi rôznorodo. Čo si odniesť z tohto príkladu. Asi snáď toľko, že tvar výrazov nám môže poskytnúť hint k riešeniu. V tomto prípade to mnohí použili. Vzorák využíva podobnosť s formulkou pre mocnosť. Ďalšia úspešná cesta viedla cez kosínusovú vetu v trojuholníku ABC. Zaujímavo úlohu vyriešil *Tonda*, keď zadanú rovnosť prepísal na ekvivalentný tvar $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CL} \cdot \overrightarrow{CA}$ pomocou vektorov a skalárneho súčinu, ktorý má mnohé pekné vlastnosti a dobre sa s ním počíta. Nakoniec varovanie pre všetkých lajdákov: skoro každá geometria potrebuje diskusiu a poriadne ošetrovanie vzájomných možných polôh bodov. *(Filip Sládek)*

Úloha A3. *Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spĺňajúce*

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + y$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}$.

Riešenie. Jednoduchým dosadením $[0, 0]$ a $[3f(0), 3f(0)]$ obdržíme rovnosti $f(3f(0)) = 0$ a $f(0) = 9f(0)$, teda $f(0) = 0$. Dosadením $[0, y]$ a $[f(x), f(y)]$ získame $f(f(y)) = y$ a následne $f(2x+y) = 2f(x)+f(y)$. Keď teraz v poslednej rovnici zvolíme $y = 0$, dostaneme $f(2x) = 2f(x)$, takže $f(2x + y) = f(2x + y)$, čo v našom prípade implikuje $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Ale toto je známa *Cauchyho funkcionálna rovnica* na racionálnych číslach s riešeniami $f(x) = cx$ pre $c \in \mathbb{Q}$. Dosadením do pôvodnej rovnice dostaneme $c = \pm 1$. Skúškou zistíme, že naozaj funkcie $f(x) = x$ a $f(x) = -x$ vyhovujú, a preto sú to všetky riešenia zadanej úlohy.

Poznámky opravujúceho. Úloha vyžadovala iba zbehlosť v dosadzovacích technikách a znalosti Cauchyho úlohy. Kto ju nepoznáte, určite si ju naštudujte, keďže je zaujímavá nielen z pohľadu výsledku, ale aj postupu riešenia, ktorý sa využíva veľmi často aj v iných funkcionálnych rovniciach. Na čo treba pamätať pri substitúciách a aj v tejto úlohe je, či dosadzujeme prvky, ktoré nám zadanie dovoľuje. Napr. treba myslieť na to, či $f(y)$ alebo $3f(0)$ patria do $\mathbb{Q}$, čo našťastie v tomto prípade splnené je. *(Filip Sládek)*

Úloha C3. *Majme $n \geq 3$ bodov ležiacich v rovine, pričom žiadne tri neležia na jednej priamke. Koľko je možností, ako vybrať $\binom{n-1}{2}$ trojuholníkov tak, aby každý z vybratých trojuholníkov obsahoval stranu, ktorá nie je stranou žiadneho iného z vybratých trojuholníkov (trojuholníky môžu mať vrcholy len z daných n bodov)?*

Riešenie (podľa Anh Dung Le). Prípad $n = 3$ vyriešme na začiatok, pre ten je to zrejme 1. Ďalej pre $n \geq 4$ všetky úvahy budú korektné, lebo budeme predpokladať iba existenciu štyroch rôznych bodov (uvedomte si, kde sú v dôkaze tie miesta). Ako ste si mnohí všimli, úlohu môžme preformulovať ako grafovú, keďže žiadne patologické prípady nevznikajú, nakoľko množina neobsahuje 3 kolineárne body.

Zoberme si konkrétny výber vyhovujúcich trojuholníkov a množinu $\mathfrak{S}$ s $\binom{n-1}{2}$ hranami takú, že každá hrana patrí práve jednému trojuholníku. Taká množina hrán podľa predpokladov existuje. Zostala nám množina $\mathfrak{M}$ s $\binom{n}{2} - \binom{n-1}{2} = n - 1$ hranami. Každý trojuholník má dve strany v $\mathfrak{M}$ a každým dvom trojuholníkom patrí iná dvojica. Keďže však z $n-1$ hrán vieme spraviť najviac $\binom{n-1}{2}$ dvojíc a toľko presne je trojuholníkov, existuje bijekcia medzi trojuholníkmi a dvojicami hrán z $\mathfrak{M}$. Z toho, že každé dve hrany v $\mathfrak{M}$ určujú trojuholník, vyplýva, že každé dve hrany majú spoločný vrchol.

Teraz ukážeme, že dokonca všetky hrany z $\mathfrak{M}$ majú spoločný vrchol. Nech to neplatí. Zoberme ľubovoľný vrchol A, z ktorého vychádzajú nejaké dve hrany $AB, AC \in \mathfrak{M}$. Ak existuje nejaká hrana v $\mathfrak{M}$ čo nevychádza z A, potom to musí byť BC (rozmyslite si). Vieme ale tiež, že AB a AC určovali trojuholník, teda $BC \in \mathfrak{S}$, a tu je spor, pretože $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{S} = \emptyset$. Vidíme, že množinu $\mathfrak{M}$ tvoria všetky hrany vychádzajúce z nejakého vrchola.

Nech našu množinu $\mathfrak{M}$ určuje jej hlavný vrchol, povedzme X. Každý trojuholník je určený dvoma hranami vychádzajúcimi z X. Ľahko si rozmyslíte, že takýto výber trojuholníkov (zoberieme všetky trojuholníky s vrcholom X) je korektný a jediný možný. Na druhej strane sa ľahko nahliadne, že pre rôzne vrcholy dostaneme rôzne množiny trojuholníkov (áno, aj tu využívame $n \geq 4$). Teda máme prosté aj surjektívne zobrazenie z množiny n vrcholov do možných konfigurácií trojuholníkov. Našli sme bijekciu n-prvkovej množiny na hľadanú množinu, teda výsledok je n.

Poznámky opravujúceho. Snáď len toľko, že keď chcete riešiť kombinatoriku, treba pamätať na všetky možné a nemožné konfigurácie, degenerované a „príliš malé“ prípady. *(Filip Sládek)*

Úloha N3. *Pre nepárne prvočíslo p dokážte*

$$1^{p-2} + 2^{p-2} + \cdots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-2} \equiv \frac{2-2^p}{p} \pmod{p}.$$

Riešenie. Na začiatok krátka postupnosť zrejmých krokov

$$\frac{2-2^p}{p} = \frac{2-(1+1)^p}{p} = \frac{2-\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}}{p} = \frac{-\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}}{p} = -\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p} = \sum_{i=1}^{p-1} - \frac{(p-1)!}{i!(p-i)!},$$

kde na konci sme využili, že $p \mid \binom{p}{i}$, takže máme sumu celých čísel. Aký zvyšok dáva každý člen v sume modulo p? Použijeme dve finty s menami *Malá Fermatova* a *Wilsonova veta.* Rátajme

$$\begin{aligned}
-\frac{(p-1)!}{i!(p-i)!} &\equiv -\frac{(p-1)!}{i!(p-i)!} \cdot (-1) \cdot (p-1)! \\
&= \frac{(p-1)!}{(p-i)!} \cdot \frac{(p-1)!}{(i)!} \\
&= (p-(i-1)) \cdots (p-1) \ \cdot \ (i+1) \cdots (p-1) \\
&\equiv (-(i-1)) \cdots (-1) \ \cdot \ (i+1) \cdots (p-1) \\
&= (-1)^{i-1} \cdot (i-1) \cdots 1 \ \cdot \ (i+1) \cdots (p-1) \\
&= (-1)^{i-1} \cdot \frac{(p-1)!}{i} \\
&\equiv (-1)^{i-1} \cdot \frac{(p-1)!}{i} \cdot i^{p-1} \\
&= (-1)^{i-1} \cdot (p-1)! \cdot i^{p-2} \\
&\equiv (-1)^i \cdot i^{p-2} \pmod p.
\end{aligned}$$

To už vyzerá sľubne, lebo našu sumu modulo p teraz vieme napísať ako

$$-1^{p-2} + 2^{p-2} - \cdots + (p-1)^{p-2}.$$

Ale ako zredukovať počet členov a ešte aj znormálniť správanie sa znamienok? Všimnime si, že pri párnych zvyškoch je plus a pri nepárnych je mínus. My ich však vieme popárovať spojením k-teho a $(p-k)$-teho člena sumy, pričom za k volíme párne čísla. Keďže však $(p-k)^{p-2} = (-1)^{p-2} \cdot (k-p)^{p-2} = -k^{p-2}$, tak po popárovaní a sčítaní našej sumy dostaneme

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} 2 \cdot (2i)^{p-2} = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} 2^{p-1} \cdot i^{p-2} \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i^{p-2} \pmod p.$$

Pre úplnosť si treba uvedomiť, kde sme potrebovali, že p je nepárne prvočíslo a ktoré kroky by inak neboli správne, ale to už necháme na čitateľa.

Poznámky opravujúceho. Ako sme videli, úloha bola dosť ťažká, čo sa odrazilo aj vo výsledkovej listine. Týmto chcem pogratulovať *Jakubovi Šafinovi*, ktorý sa jediný popasoval s najťažším príkladom 3. série. A ako sa na dačo také dalo prísť? No finta je v tom, že takto so zvyškami a celými číslami modulo p sa ťažko pracuje a musíme robiť často akési umelé neprirodzené kroky, ako v riešení vyššie. Ale ono sa to dá aj inak. Keď berieme zvyšky modulo prvočíslo, tie tvoria perfektnú štruktúru odborne zvanú *pole.* Napríklad si môžme pre ne zadefinovať sčítanie a násobenie tak, ako nám to je prirodzené, a už nemusíme rátať modulo, ale povieme, že keď berieme povedzme štruktúru modulo 7, tak $2+3\cdot 2 = 1$ a podobne. Potom dokonca vieme zaviesť akési racionálne čísla v takom zmysle, že $\frac{1}{a}$ bude znamenať taký prvok, ktorým keď vynásobíme a dostaneme 1. Pre nenulové a existuje práve jeden taký prvok modulo prvočíslo a dokonca sa dobre správa. Napríklad rôzne prvky majú rôzne inverzy a $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = (a+b) \cdot \frac{1}{ab}$. Tu to nekončí, lebo taký prvok $\frac{1}{a}$ vieme aj pekne vyjadriť ako a^{p-2}, čo priamo vyplýva z *Malej Fermatovej vety.*

Tu presne prichádza na rad intuícia pri pohľade na náš príklad. Skúsenému oku neujde, že ľavá strana totiž nie je nič iné ako $\sum_{i=1}^{(p-1)/2} \frac{1}{i}$. A čo kombinačné čísla, ktoré dostaneme na pravej strane? No tie sú v tvare zlomkov. Teda priamo vidíme, že

$$-\frac{(p-1)!}{(p-i)!i!} = \frac{1}{(p-i)!(-1)^i(p-1)\cdots(p-i)} = \frac{1}{(p-i)\cdot(p-1)!\cdot(-1)^i} = (-1)^i \cdot \frac{1}{i}.$$

Týmto spôsobom viac vidíme do danej štruktúry, máme náhľad, čo sú to za prvky, a v neposlednom rade to sprehľadnilo celú situáciu a jej zápis. Pre tých, ktorí sa dostali až tu, poviem len to, že sa to oplatí ovládať dokazuje aj dvojriadkové riešenie úlohy 4 na IMO 2005, kde jeden riadok riešenia vyzerá $a_{p-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 = 0$ pre $p > 3$. Konečne spomeňme aj úlohu 3 na CPS 2008, ktorej výraz predelený p^2 podľa poznatkov uvedených vyššie (podstatný krok je jednoznačnosť inverzu) vieme prepísať ako $\sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{1}{i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{p-1} i^2 = \frac{(p-1)p(2p-1)}{6}$. *(Filip Sládek)*