Zadání 2. série

Termín odeslání: 6. června 2016

Adresa: *Korespondenční seminář iKS*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Czech Republic

Úloha G2. Na straně BC trojúhelníku ABC je dán bod K. Kružnice k_1 a k_2 procházejí bodem K a dotýkají se stran AB a AC po řadě v bodech B a C. Označme L jejich průsečík různý od K a M obraz bodu A v osové souměrnosti podle osy strany BC. Dokažte, že body K, L a M leží na jedné přímce.

Úloha C2. Fyzik izoloval 2016 atomů, z nichž každý může mít nejvýše jeden elektron. K dispozici má diodu, kterou když zapojí mezi dva atomy A a B ve směru od A do B a A zrovna má elektron a B ne, elektron se přesune k B. V ostatních případech se nestane nic. Fyzik má za úkol vybrat dva atomy a poté libovolně používat diodu (i s ostatními atomy), aby měl jistotu, že oba vybrané mají na konci stejný počet elektronů. Může se mu to podařit, když nezná počáteční rozmístění elektronů a při použití diody nepozná, jestli došlo, nebo nedošlo k přesunu elektronu?

Úloha A2. Nechť $a_1, a_2, \dots, a_n$ a $b_1, b_2, \dots, b_n$ jsou kladná reálná čísla splňující

- $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$,
- $b_1 b_2 ... b_k \geq a_1 a_2 ... a_k$ pro každé $1 \leq k \leq n$.

Dokažte, že $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Úloha N2. Prvočíslo p má tu vlastnost, že $\frac{p-1}{2}$ je také prvočíslo. Nechť a, b a c jsou přirozená čísla nesoudělná s p. Dokažte, že p dělí výraz $a^n + b^n + c^n$ pro nejvýše $1 + \sqrt{2p}$ hodnot n z množiny $\{1, \dots, p-1\}$.