Zadania 3. série

Termín odoslania: 26. septembra 2016

Adresa: *KMS – iKS*
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovakia

Úloha C3. Maja a Vilko sa hrajú na nekonečnom plaste medu (rovine rozdelenej na šesťuholníky). Na začiatku sú všetky šesťuholníky prázdne. Maja vždy priletí a naplní dva susediace šesťuholníky medom, následne priletí Vilko a med z ľubovoľného šesťuholníka zje. Maja vyhrá, ak se jej podarí zaplniť k za sebou idúcich šesťuholníkov v jednom rade. Nájdite najväčšie k také, že Maja dokáže vyhrať nezávisle na tom, čo robí Vilko.

Úloha A3. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky dvojice reálnych čísel x, y platí:

$$f(yf(x) - x) = f(x)f(y) + 2x.$$

Úloha N3. Uvažujme nekonštantnú aritmetickú postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Predpokladajme, že existujú nesúdeliteľné prirodzené čísla $p, q > 1$ také, že a_1^2, a_{p+1}^2 a a_{q+1}^2 sú tiež členmi tejto aritmetickej postupnosti. Dokážte, že všetky členy tejto aritmetickej postupnosti sú celé čísla.

Úloha G3. Dve kružnice k_1 a k_2 so stredmi v bodoch O_1 a O_2 sa pretínajú v bodoch M, N. Ich spoločná dotyčnica t bližšia ku M sa dotýka k_1 v bode A a k_2 v bode B. Bod C je taký bod na kružnici k_2, že BC je priemer. Ďalej D je priesečník priamky O_1O_2 s priamkou kolmou na AM prechádzajúcu bodom B. Dokážte, že M, D a C ležia na jednej priamke.