Zadání 5. série

Termín odeslání: 6. ledna 2020

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha A5. Jsou dána kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ splňující $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Dokažte, že platí

$$\left(\frac{1}{a_1^2} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2^2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{a_n^2} - 1\right) \geq \left(n^2 - 1\right)^n.$$

Úloha C5. *Závodní trať* je lomená čára v rovině složená z konečně mnoha orientovaných úseček, z nichž žádné dvě se neprotínají ve svých vnitřních bodech. *Zatáčka* je bod, který je koncovým bodem jedné z těchto úseček a počátečním bodem té následující. Zatáčka B mezi orientovanými úsečkami $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ je *pravotočivá*, pokud má řidič formule jedoucí z A do B bod C po pravé ruce. Analogicky definujeme *levotočivou* zatáčku.

V rovině je dáno n bodů v obecné poloze[1]. Kuba by chtěl postavit závodní trať složenou z $n-1$ orientovaných úseček, jejichž krajními body je právě těchto n bodů. Lenka mu zadala posloupnost délky $n-2$ složenou ze znaků R, L, kde R značí pravotočivou a L levotočivou zatáčku. Dokažte, že Kuba dovede body propojit závodní tratí tak, aby pravotočivost či levotočivost jejích zatáček přesně odpovídala posloupnosti, kterou Lenka zadala.

Úloha G5. Uvnitř ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P, Q takové, že platí $|\angle PBA| = |\angle QBC|$, $|\angle PCB| = |\angle QCA|$ a $|\angle PAC| = |\angle QAB|$. Nechť jsou O_1, O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníků PBC a QBC. Dokažte, že $|\angle BAO_1| = |\angle CAO_2|$.

Úloha N5. Je dáno přirozené číslo k. Posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ definujme následovně: a_n, b_n jsou nesoudělná přirozená čísla a splňují

$$\frac{a_n}{b_n} = 1 + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{n^k}.$$

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že $b_n > b_{n+1}$.

[1] To znamená, že žádné tři neleží na jedné přímce.