Řešení 3. série

Úloha A3. *Reálná čísla a, b, c splňují $|(a-b)(b-c)(c-a)| = 1$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $|a| + |b| + |c|$?*

Řešení. Vzhledem k symetrii obou výrazů můžeme BÚNO předpokládat $a > b > c$ (rovnosti nemůžou nastat kvůli podmínce). Všimneme si, že vyhovuje-li podmínce trojice (a, b, c), tak vyhovuje i trojice $(a', b', c') = (a-b, 0, c-b)$, protože se odečtením téhož čísla od všech proměnných nezmění jejich rozdíly.

Zároveň díky předpokládanému uspořádání trojice a trojúhelníkové nerovnosti platí

$$|a'| + |b'| + |c'| = |a-b| + |c-b| = a - c = |a-c| \leq |a| + |c| \leq |a| + |b| + |c|.$$

Přechodem k této nové trojici jsme tedy nezvětšili hodnotu minimalizovaného výrazu. Proto nám stačí najít dolní odhad pro tuto novou trojici (a', b', c'), kde je prostřední proměnná nulová, poněvadž ho pomocí výše popsaného postupu umíme zobecnit pro všechny trojice.

Předpokládejme tedy $b = 0$, pak je a kladné a c záporné. Chceme minimalizovat hodnotu výrazu $|a| + |c|$ za podmínky $1 = |-ac(c-a)| = |a||c|(|a| + |c|)$. Z AG nerovnosti, použité na podmínku, dostáváme:

$$1 = |a||c|\left(|a| + |c|\right) = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{|a||c|}\right)^2\left(|a| + |c|\right) \leq \frac{1}{4}\left(|a| + |c|\right)^3$$

Platí tedy $|a| + |c| \geq \sqrt[3]{4}$, přičemž rovnost nastává jedině pro $|a| = |c|$, což po dosazení zpět do podmínky dá trojici $(a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$, pro níž $|a| + |b| + |c| = \sqrt[3]{4}$.

Hledaným minimem je tudíž $\sqrt[3]{4}$.

Poznámky opravujícího. Nerovnost se ukázala být pro většinu řešitelů snadnou kořistí, takže jsem za ní rozdal spousta bodů. Všechny rozumné postupy byly celkem podobné vzorovému řešení (dal se například zcela vypustit první krok a přímo použít správná kombinace AG a trojúhelníkové nerovnosti), několik lidí se po položení $b = 0$ vydalo na zhoubnou cestu vyjadřování jedné z proměnných z podmínky přes diskriminant a následného derivování, což se ovšem nikomu z nich nepovedlo dovést ke zdárnému konci (ztratili body za technické problémy a numerické chyby, na což je zapotřebí v analytických řešeních dávat pozor). Body jsem rovněž strhával za nedostatečné zdůvodnění toho, proč se stačí zabývat pouze případem $b = 0$.

(Danil Koževnikov)

Úloha N3. *Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro každé $x, y \in \mathbb{N}$ je $xf(x) + 2xf(y) + f(y)^2$ druhou mocninou celého čísla.*

Řešení. Funkce $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{N}$ vyhovuje zadání, jelikož pro každé $x, y \in \mathbb{N}$ platí $xf(x) + 2xf(y) + f(y)^2 = (x+y)^2$. Ukažme si dva způsoby, jak dokázat, že tato funkce je jediná vyhovující zadání.

Řešení prvé (rozdíly čtverců). Na začátek si dokážeme jednoduché lemma:

Lemma. *Pro libovolné celé číslo $d \neq 0$ a nezáporná čísla x, y splňující $x^2 - y^2 = d$ platí $x, y \leq |d|$.*[1]

Důkaz. Pro taková čísla platí $|x-y| \cdot |x+y| = |d|$. Jelikož $d \neq 0$, tak $x \neq y$, tedy $|x-y| \geq 1$. Poté musí platit $|x|, |y| \leq |x+y| \leq |d|$. □

[1] Platí i silnější tvrzení, kde $|d|$ je nahrazeno $\frac{|d|+1}{2}$, ale nám bude stačit slabší odhad.

Uvažme funkci f splňující podmínku ze zadání a připusťme, že existuje $x \in \mathbb{N}$, pro které $f(x) \neq x$. Pro toto x a libovolné $y \in \mathbb{N}$ poté dle zadání platí, že $xf(x) + 2xf(y) + f(y)^2 - (x + f(y))^2 = x\,(x - f(x)) \neq 0$. Dle lemmatu musí platit, že $x + f(y) \leq |x\,(x - f(x))\,|$, tedy $f(y) \leq |x\,(x - f(x))\,| - x$ pro všechna přirozená čísla y. Tedy f nabývá pouze konečně mnoha hodnot. Označme tento počet hodnot n a největší možnou hodnotu M.

Pro libovolné přirozené číslo m dle Dirichletova principu existují alespoň dvě různá přirozená čísla z množiny $\{m, m+1, \dots, m+n\}$, pro která f nabývá stejné hodnoty. Pokud ovšem $x_1 > x_2$ a $f(x_1) = f(x_2)$, tak volbou $x = x_1, x_2$ a $y = 1$, dostaneme, že

$$x_1 f(x_1) + 2x_1 f(1) + f(1)^2 - \left(x_2 f(x_2) + 2x_2 f(1) + f(1)^2\right) = (x_1 - x_2)\,(f(x_1) + 2f(1)) > 0$$

je rozdíl čtverců. Pokud zvolíme x_1, x_2 z množiny $\{m, m+1, \dots, m+n\}$, tak musí $(x_1 - x_2)\,(f(x_1) + 2f(1)) \leq 3(n+1)M$. Tedy dle lemmatu $x_1 f(x_1) + 2x_1 f(1) + f(1)^2 \leq (3(n+1)M)^2$, ale toto rozhodně neplatí, zvolíme-li $m = (3(n+1)M)^2$, jelikož poté bude $x_1 f(x_1) + 2x_1 f(1) + f(1)^2 \geq x_1 > m = (3(n+1)M)^2$. To je spor z předpokladem, že $f(x) \neq x$ pro nějaké $x \in \mathbb{N}$.

Řešení druhé (matematická indukce). Indukcí na n ukážeme, že $f(n) = n$.

Pro $n = 1$ dosaďme $x = y = 1$. Poté $3f(1) + f(1)^2$ je čtverec. Jelikož $(f(1)+1)^2 \leq 3f(1) + f(1)^2 < (f(1)+2)^2$. Musí tedy nutně nastat rovnost v první z nerovností, což znamená, že $f(1) = 1$.

Pro $n = 2$ dosaďme $x = y = 2$. Poté $6f(2) + f(2)^2$ je čtverec. To rozhodně není pravda, pokud $f(2) = 1$, tedy $f(2) \geq 2$. Poté platí $(f(2)+2)^2 \leq 6f(2) + f(1)^2 < (f(2)+3)^2$. Musí tedy nutně nastat rovnost v první z nerovností, což znamená, že $f(2) = 2$.

Uvažme, teď $n > 2$ a předpokládejme, že $f(n-2) = n-2$ a $f(n-1) = n-1$. Dosazením $x = n, y = n-2$ a $x = n, y = n-1$ dostaneme, že $nf(n) + 3n^2 - 8n + 4 = a^2$ a $nf(n) + 3n^2 - 4n + 1 = b^2$ pro nějaká celá nezáporná čísla a, b.

Teď ukážeme, že $b = a+1$. Rozhodně $a < b$. Pokud by $a + 2 \leq b$, tak $4n - 3 = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) \geq 2(2a+2) = 4a+4$. Poté ale $a < n-1$. Toto ovšem implikuje, že $3n^2 - 8n + 4 < (n-2)^2$, což je ekvivalentní s $n(n-2) < 0$, což zřejmě neplatí. Tedy $b = a+1$.

Poté $4n - 3 = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) = 2a+1$, tedy $a = 2n-1$. Z toho lze již jednoduše dopočítat, že $f(n) = n$. Tím je důkaz indukcí hotov.

Poznámky opravujícího. U této úlohy platilo, co řešitel, to nové řešení. Většina myšlenek se vydala podobnými cestami jak dvě výše sepsané, tedy indukcí nebo vhodnými odhady na rozdíly čtverců. Mimo to se objevilo například řešení *Magdalény Mišinové* využívající prvočísla a nebo řešení *Vaška Janáčka*, ve kterém se postupně ukázalo, že $f(x) \leq x$ a $f(x) \geq x$ pro všechna přirozená čísla x. *(Pavel Turek)*

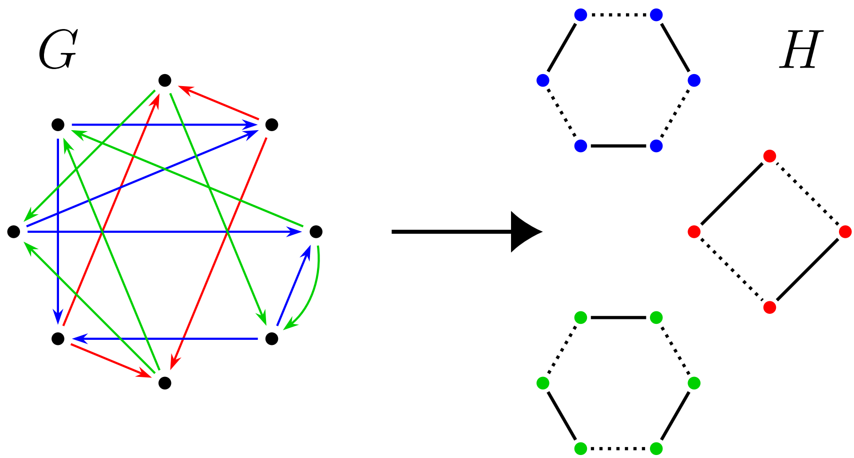
Úloha C3. *Vodka a Tonda by si přáli vybudovat iKSlandii, kterou by chtěli poctít nejkrásnější úlohy z historie iKSka. Tonda navrhl, že iKSlandia bude složena z n místností věnovaných jednotlivým úlohám, z nichž některé budou propojeny jednosměrnými chodbami. Podle Tondy by z každé místnosti i do každé místnosti měly vést právě dvě chodby. Vodka by naopak chtěl návštěvníkům ulehčit rozhodování o cestě a z Tondova plánu ponechat pro každou místnost jednu chodbu vedoucí do ní a jednu chodbu vedoucí z ní. Ukažte, to Vodka může provést 2^k způsoby pro nějaké přirozené k.*

Řešení. Tondův návrh iKSlandie považujme za orientovaný graf s n vrcholy, z nichž každý má právě dvě vstupující hrany (šipky) a právě dvě vycházející hrany. Definujme neorientovaný graf H následovně: vrcholy H nechť jsou původní hrany z grafu G a nechť mezi vrcholy h_1, h_2 vede (neorientovaná) hrana, právě pokud hrany h_1, h_2 v G vychází ze stejného vrcholu nebo vchází do stejného vrcholu.

Ukažme, že H se skládá z několika disjunktních cyklů. *Cyklem* budeme rozumět konečnou posloupnost vrcholů $h_1, \dots, h_k$ $(k > 1)$ takovou, že vede hrana mezi h_k, h_1 a mezi každými

h_i, h_{i+1} pro $i \in \{1, \ldots, k\}$ a kromě těchto už z vrcholů $h_1, \ldots, h_k$ žádné další hrany nevedou.[2] Dva cykly považujme za totožné, vzniká-li jeden z druhého pouze cyklickou záměnou indexů. Uvažujme v G libovolnou hranu h vedoucí z vrcholu A do B. Z vlastností Tondova návrhu pak existuje právě jedna hrana $h_A \neq h$ vycházející z A a právě jedna $h_B \neq h$ vcházející do B. Pak v grafu H určitě vede hrana mezi h, h_A a mezi h, h_B a z h už žádné další hrany nevedou.

Nyní pokud $h_A = h_A$, znamená to, že hrany h i $h_A = h_b$ vedou z A do B. V H tak jsou spojeny pouze spolu a žádná s ničím jiným. Uzavřeli jsme tedy (dvouprvkový) cyklus. Pokud $h_A \neq h_B$, pak má h v grafu H stupeň dva. Pak ale i h_A má stupeň dva, neboť jinak by ležela v dvouprvkovém cyklu s h, která je ale však spojena i s h_B, což je spor. Takto můžeme postupovat pro hranu $h' \neq h$ spojenou s h_A (ta má též stupeň dva) apod. Nacházíme tak nové vrcholy H, z konečnosti se někdy musíme vrátit do vrcholu, v němž jsme už byli. Budiž g vrchol, v němž se toto stalo poprvé. Kdyby $g \neq h$, pak už by musel mít stupeň tři: jednou hranou jsme do něj vešli cestou z h, jednou jsme z něj vyšli a jednou jsme se do něj podruhé vrátili (tato třetí hrana nemůže stejná jako ta, kterou jsme přišli cestou z h, neboť potom už předchozí vrchol měl vlastnost, podle které jsme zvolili g). Určitě tedy $g = h$, tedy jsme uzavřeli cyklus.



Máme tedy graf H složený z několika disjunktních cyklů. Ukažme, že v každém je sudý počet vrcholů. Hranu v H spojující vrcholy h_1, h_2 zakresleme plnou čarou, pokud hrany h_1, h_2 v G *vcházejí* do téhož vrcholu, a tečkovanou čarou, pokud *vycházejí* ze stejného vrcholu. Pozorujme, že plné a tečkované hrany se v cyklu musí střídat. V dvouprvkovém cyklu je jediná hrana plná i tečkovaná, ale vrcholy jsou v něm dva, takže tvrzení platí. Je-li v cyklu více než dva vrcholy, pak žádná hrana nemůže být plná i tečkovaná zároveň, a jelikož se střídají, musí jich být sudý počet. Počet hran v cyklu je ale stejný jako počet vrcholů, tedy i vrcholů je sudý počet.

Abychom z Tondova návrhu iKSlandie vytvořili vyhovující Vodkův návrh, musíme odebrat hrany z G (tedy vrcholy z H) tak, aby do každého vrcholu vcházela i vycházela právě jedna hrana. V cyklech H to odpovídá tomu, že odebereme vrcholy tak, aby každé hraně (tečkované i plné) zůstal právě jeden z vrcholů, které spojuje. Pak ale když v rámci cyklu rozhodneme o jednom vrcholu, zda zmizí či zda zůstane, jednoznačně to už určí zmizení či zůstání všech ostatních vrcholů v cyklu (nic se nerozbije, protože vrcholů v cyklu je sudě mnoho). O jednom cyklu tak

[2] Proč to takhle formálně vypisujeme? Chceme povolit „cyklus“ složený z dvou vrcholů spojených hranou.

můžeme rozhodnout dvěma způsoby. Tato rozhodnutí jsou pro jednotlivé cykly nezávislá, tedy máme celkem 2^k způsobu, jak vyrobit Vodkovu iKSlandii, kde k je počet různých cyklů v H.

Poznámky opravujícího. Téměř všechna došlá řešení byla správně a postupovala až na nějakou ekvivalentní (a občas více zmatenou) formulaci stejně jako vzorák. Část řešitelů si dala záležet na zdůvodnění všech technikálií (že se cesty zacyklí, že opravdu všechny hranovrcholy rozdělíme do disjunktních cyklů apod.), zatímco jiní to spíše jen tak prohlásili či odmávli. Snažil jsem se být shovívavý a uznávat, že jasné věci jsou jasné, ale některé extrémy z druhého typu řešitelů si vysloužily pár ztracených bodů. *(Matěj Doležálek)*

Úloha G3. *Nechť E je střed kružnice připsané proti bodu A v trojúhelníku ABC. Body X a Y leží na polopřímkách opačných k BA, CA takovým způsobem, že $AXEY$ je tětivový čtyřúhelník. Na úsečkách BE, CE nalezneme body S a T takové, že $|\angle AXE| = |\angle BTE|$ a $|\angle AYE| = |\angle CSE|$. Průsečík BT a CS nazveme K. Ukažte, že XY, ST a EK se protínají v jednom bodě.*

Řešení. Důkaz je nechán jako cvičení pro čtenáře.