TR *i*KS ko

Úloha 1. *Nech n je kladné celé číslo. Dokážte, že nenulové koeficienty polynómu*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=0}^{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n - k)$$

vieme ofarbiť $2^n - 1$ farbami tak, aby súčet koeficientov každej farby bol 0 a každá farba bola použitá aspoň raz.

Řešení. Všimnime si, že tu nie je žiadny konštantný člen; pre každý člen $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ majme príslušnú podmnožinu $[n]$, ktorá obsahuje všetky i také, že $a_i \neq 0$. Každý člen, ktorý patrí do tej istej množiny, označme rovnakou farbou. Existuje $2^n - 1$ neprázdnych podmnožín $[n]$ a nie je ťažké si všimnúť, že každá množina zodpovedá aspoň jednému členu s nenulovým koeficientom. Aby sme dokázali, že ich súčet je 0, dosadíme do pre každú podmnožinu S do polynómu $x_j = 1$ ak $x_j \in S$ a 0 inak.
. $\square$

Úloha 2. *Nech n je kladné celé číslo. V nekonečnej mriežke $\mathbb{Z}^2$ je n bodov vyfarbených na červeno, zatiaľ čo ostatné sú vyfarbené na modro. Každý červený bod je označený vzdialenosťou od najbližšieho modrého bodu v tom istom riadku alebo stĺpci. Nájdite najmenšie reálne číslo α, pre ktoré súčet všetkých označení neprekročí hodnotu $100n^\alpha$, nezávisle od n a umiestnenia červených bodov.*

(Poznámka: Riadok je množina bodov s danou súradnicou y a stĺpec je množina bodov s danou súradnicou x.)

Řešení. Odpoveďou je $\frac{3}{2}$; na konštrukciu stačí len štvorec.

Pre červenú bunku c nech $h(c)$ a $v(c)$ označujú počet červených buniek v jej riadku, resp. stĺpci, vrátane c. Nech $\mathcal{R}$ označuje množinu riadkov, v ktorých sa nachádza aspoň jeden červený bod. Potom platí

$$\sum_c \text{label}(c) \le \sum_c \min(h(c), v(c)) \le \sum_c \sqrt{h(c)v(c)} = \sum_{R \in \mathcal{R}} \sqrt{|R|} \sum_{c \in R} \sqrt{v(c)}.$$

Keďže $\sum_{c \in R} v(c) = n$ pre ľubovoľné R, podľa Jensenovej vety dostaneme, že pravá strana rovnice je

$$\le \sum_{R \in \mathcal{R}} \sqrt{|R|} \cdot |R| \sqrt{\frac{n}{|R|}} = \sum_{R \in \mathcal{R}} |R| \sqrt{n} = n\sqrt{n}$$

$\square$

Úloha 3. *Nech ABC je trojuholník a nech M a N označujú stredy úsečiek $\overline{AB}$ a $\overline{AC}$. Nech X je bod taký, že úsečka $\overline{AX}$ je dotýkajúca sa opísanej kružnice trojuholníka ABC. Označme kružnicu prechádzajúcu bodmi M a B a dotýkajúcu sa úsečky $\overline{MX}$ ako ω_B a kružnicu prechádzajúcu bodmi N a C a dotýkajúcu sa úsečky $\overline{NX}$ ako ω_C. Ukážte, že kružnice ω_B a ω_C sa pretínajú na priamke BC.*

Řešení. Nech $\overline{XY}$ je druhá dotyčnica z bodu X k (AMN). Potom priamka $\overline{XM}$ je dotyčnicou k (BMY), a preto bod Y leží na ω_B. Nech Z je stred úsečky $\overline{AY}$. Potom $\overline{MX}$ je M-symetrická os v trojuholníku AMY. Keďže $\overline{MZ} \parallel \overline{BY}$, vyplýva z toho, že $\angle AMX = \angle ZMY = \angle BYM$. Z toho vyplýva, že $\overline{XM}$ je dotyčnicou k (BMY).

Podobne, ω_C je opis trojuholníka CNY. Keďže $AMYN$ je tiež tetivový, z Miquelovej vety vyplýva, že ω_B a ω_C sa pretínajú na $\overline{BC}$. □

Úloha 4. *Nech p je prvočíslo a nech a a b sú kladné celé čísla menšie ako p. Dokážte, že*

$$\sum_{k=1}^{b}(-1)^{\lfloor (a-1)k/p\rfloor+\lfloor ak/p\rfloor} \geq 0.$$

Řešení. Celé číslo k nazveme „zlé“, ak platí:

$$2 \nmid \left\lfloor \frac{(a-1)k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{ak}{p} \right\rfloor$$

Je zrejmé, že k je zlé práve vtedy, ak existuje celé číslo m, pre ktoré platí:

$$(a-1)k < mp < ak$$

Ak je teda i zlé a j je zlé, zrejme je zlé aj $i+j$. Ak teda existuje celé číslo b také, že súčet:

$$\sum_{k=1}^{b}(-1)^{\lfloor (a-1)k/p\rfloor+\lfloor ak/p\rfloor} < 0$$

Potom existujú i, j také, že $i + j = b + 1$ a obidve i aj j sú zlé, takže $b + 1$ je zlé a indukciou je p zlé. Je však zrejmé, že p nemôže byť zlé, čo je spor. □