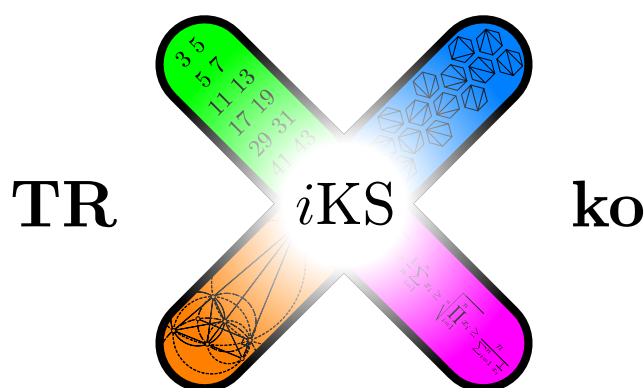




Úloha 1. V ostrouhlom trojuholníku $\triangle ABC$, $AB < AC < BC$ uvážme A_1, B_1, C_1 päty výšok z A, B, C na protiľahlé strany. Nech obraz bodu B_1 v osovej súmernosti podľa CC_1 je bod Q a obraz bodu C_1 podľa BB_1 je bod P . Dokážte, že kružnica opísaná A_1PQ prechádza stredom BC .

Úloha 2. Staroveké Jednorozmerné cisárstvo sa rozprestieralo pozdĺž jednej priamky. Na začiatku neexistovali žiadne mestá. Postupne bolo po jednom založených celkom n rôznych bodových miest; počnúc druhým mestom sa každé novozaložené mesto a k nemu najbližšie už existujúce mesto (ak boli také dve, tak to staršie) vyhlásili za sesterské mestá. Na zachovanej mape cisárstva sú viditeľné mestá a vzdialenosti medzi nimi, nie však poradie ich založenia. Historici sa z mapy snažia vyvodiť záver, že každé mesto malo najviac 41 sesterských miest.

1. Pre $n = 10^6$ nájdite takú mapu, z ktorej je možné tento záver vyvodiť.
2. Dokážte, že pre $n = 10^{13}$ tento záver nemožno vyvodiť zo žiadnej mapy.

Úloha 3. Nech p je prvočíslo a $H \subseteq \{0, 1, \dots, p-1\}$ je neprázdna množina. Predpokladajme, že ku každému prvku $a \in H$ existujú od a rôzne prvky $b \in H$ a $c \in H$, pre ktoré je výraz $b + c - 2a$ deliteľný p . Dokážte, že $p < 4^k$, kde k označuje počet prvkov množiny H .