Zadanie 6. série

Termín odoslania: 3. februára 2020

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha G6. V ostrouhlom trojuholníku ABC s opísanou kružnicou ω sú E, F päty výšok z vrcholov B, C a priesečník BE s CF je H. Priamka AH po druhýkrát pretne ω v bode $P \neq A$. Priamka PE pretne ω po druhýkrát v bode $Q \neq P$. Dokážte, že BQ rozpoľuje úsečku EF.

Úloha A6. Nájdite všetky reálne čísla k také, že polynóm $x^2 + kx + 1$ je možné vyjadriť ako podiel dvoch nenulových polynómov s nezápornými koeficientami.

Úloha N6. Pepa má na tabuli napísanú dvojicu čísel $\frac{m}{n}$ a $\frac{n}{m}$, kde m, n sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Po chvíli snaženia našiel fixky, ktorými na tabuľu môže písať. V každom kroku môže zvoliť čísla x, y napísané na tabuli a pripísať k nim ich aritmetický priemer $\frac{x+y}{2}$ alebo ich harmonický priemer $\frac{2xy}{x+y}$. Nájdite všetky usporiadané dvojice (m, n), pre ktoré Pepa dokáže v konečne veľa krokoch napísať na tabuľu číslo 1.

Úloha C6. Rado stojí v bode $x = 1$ reálnej osi. Vždy, keď sa nachádza v bode $x = a$, môže v jednom kroku preskočiť podľa svojho výberu buď do bodu $x = a + 2$, alebo do bodu $x = \frac{a}{2}$. V každom bode, ktorý Rado navštívi (vrátane bodu $x = 1$), zanechá svoju značku. Dokážte, že počet všetkých bodov, v ktorých sa po n krokoch môže nachádzať Radova značka (nie nutne po tej istej postupnosti skokov), je $F_{n+5} - (n + 4)$, kde $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť *Fibonacciho čísel* definovaná vzťahmi $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre $n \geq 0$.