TR iKS ko

Úloha 1. *Niekoľko čerpacích staníc rozmiestnených na okružnej trase má dokopy práve toľko benzínu, koľko stačí jednému autu na absolvovanie celej okružnej jazdy. Dokážte, že ak začnete na správnej stanici s prázdnou nádržou, budete schopní prejsť celú trasu dookola.*

Řešení. Predstavte si, že máte veľkú nádrž s dostatkom benzínu na celú okružnú jazdu a zároveň dosť miesta na to, aby ste po ceste mohli vyprázdniť každú čerpaciu stanicu. Začnite na ľubovoľnej stanici a počas jazdy okolo si zapisujte množstvo benzínu v nádrži vždy pri príchode na čerpacie stanice. Na konci cesty, keď dorazíte späť na východiskovú stanicu s pôvodným množstvom benzínu, skontrolujte svoj zoznam. Stanica označená najmenším číslom je tá, z ktorej chcete začať s prázdnou nádržou.

$\square$

Úloha 2. *Štyri lode sa plavia po dvojrozmernej planéte. Každá loď sa pohybuje po priamke konštantnou rýchlosťou. Žiadne dve lode sa nepohybujú navzájom rovnobežne. Ich cesty sa začali kedysi v dávnej minulosti. Niekedy sa dvojica lodí zrazí. Loď pokračuje vo svojej ceste aj po zrážke. Je však dostatočne pevná na to, aby prežila iba dve zrážky; pri tretej zrážke zanikne. Situácia je pochmúrna. Päť zo šiestich možných zrážok sa už odohralo (žiadna zrážka nezahŕňala viac než dve lode) a dve lode sú vyradené z prevádzky. Aký osud čaká zvyšné dve?*

Řešení. Nech os z označuje čas. Nech osi x a y označujú dvojrozmernú planétu. Potom sú štyri trajektórie priamkami. Keďže žiadna zrážka nezahŕňala viac než dve lode, tieto štyri priamky musia všetky ležať v jednej rovine. Šiesta zrážka je teda istá.

$\square$

Úloha 3. *Po kruhovom rybníčku pláva kačička. Na obvode číha líška, ktorá je štyrikrát rýchlejšia, ale bojí sa vody. Kačička chce líške ujsť, no vzlietnuť vie iba zo súše. Dokáže líške uniknúť?*

Řešení. Áno. Nech má rybník polomer R a kačička rýchlosť v. Líška má rýchlosť $4v$. Kačička najprv pláva po malom kruhu so stredom v strede rybníka a polomerom trochu menším než $R/4$. Tam má väčšiu uhlovú rýchlosť než líška na brehu, takže sa vie dostať presne oproti nej. Potom vyrazí priamo k najbližšiemu brehu. Musí preplávať menej než $3R/4$, kým líška musí obehnúť polkruh dĺžky πR. Časy sú teda

$$\frac{3R}{4v} < \frac{\pi R}{4v}.$$

Keďže $3 < \pi$, kačička dorazí na breh skôr a unikne. $\square$

Úloha 4. *Nech $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_\ell \leq n$ sú celé čísla, pričom $\ell > (n+1)/2$. Potom existujú indexy $1 \leq i < j < k \leq \ell$ také, že*

$$a_i + a_j = a_k.$$

.

Řešení. Položme $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_\ell\}$ a $B = A - a_1 = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_\ell - a_1\}$. Množiny A aj B sú podmnožinami prvých n prirodzených čísel. Keďže

$$|A| + |B| = \ell + (\ell - 1) > n,$$

musia mať neprázdny prienik. Teda existujú j, k také, že $a_j = a_k - a_1$, kde $1 < j < k \leq \ell$. Preto $a_1 + a_j = a_k$. Stačí teda vziať $i = 1$, čím je tvrdenie dokázané. $\square$

Úloha 5. *ájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré možno všetky kladné delitele čísla n vložiť do políčok obdĺžnikovej tabuľky tak, aby platilo: každé políčko obsahuje iného deliteľa, súčty vo všetkých riadkoch sú rovnaké a súčty vo všetkých stĺpcoch sú rovnaké.*

Řešení. Nech má tabuľka a riadkov a b stĺpcov, kde $a \geq b$. Ak $b = 1$, potom každý riadok obsahuje len jedno číslo, takže rovnosť riadkových súčtov je možná iba pre jediný deliteľ, teda $n = 1$. Nech teda $b > 1$. Spoločný súčet v riadku je väčší než n, lebo v riadku s deliteľom n je ešte aspoň jeden kladný deliteľ. Deliteľov väčších než n/b je najviac $b - 1$: ku každému takému deliteľu d patrí deliteľ $n/d < b$. Keďže $a \geq b > b - 1$, existuje riadok bez takéhoto veľkého deliteľa. Všetky jeho prvky sú teda najviac n/b, a preto má súčet najviac $b \cdot \frac{n}{b} = n$, spor.

Ostáva teda iba $n = 1$, ktoré zjavne vyhovuje. $\square$