TR iKS ko

Úloha 1. *Pre ľubovoľné dve kladné celé čísla $n > m$ dokážte*

$$[m,n] + [m+1, n+1] \geq \frac{2nm}{\sqrt{n-m}},$$

kde $[x,y]$ značí najmenší spoločný násobok čísel x, y

Řešení. Nech (x,y) značí najväčšieho spoločného deliteľa x, y. Následne platí známy vzťah $[x,y] = \frac{xy}{(x,y)}$. Nech $d_1 = (m,n) = (m, n-m)$ a $d_2 = (m+1, n+1) = (m+1, n-m)$. Vidíme, z Euklidovho algoritmu, že d_1 aj d_2 delia $n-m$ ale sú navzájom nesúdeliteľné, lebo $d_1 \mid m$ a $d_2 \mid m+1$, čiže $d_1 d_2 \mid n-m$. Keď dáme naše pozorovania dokopy tak dostávame pomocou AG nerovnosti dokazovanú nerovnosť:

$$\frac{mn}{d_1} + \frac{(m+1)(n+1)}{d_2} > mn\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right) \geq \frac{2mn}{\sqrt{d_1 d_2}} \geq \frac{2mn}{\sqrt{n-m}},$$

□

Úloha 2. *V trojuholníku ABC označme E,F postupne päty výšok z vrcholov B a C. Nech bod X leží na priamke BC. Predpokladajme, že kružnica opísaná trojuholníku BEX a priamka AB sa pretínajú druhýkrát v bode Y a kružnica opísaná trojuholníku CFX a priamka AC sa pretínajú druhýkrát v bode Z. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku AYZ sa dotýka výšky z vrcholu A.*

Řešení. Uhlíme orientovane modulo $180°$ a (ABC) značí kružnicu opísanú útvaru ABC. Nech P je priesečník (BEX) a (CFX). Podľa vety o potenčnom strede kružníc $(BFEC), (BEX), (CFX)$ sa BE, CF, PX pretínajú v jednom bode, čo aj znamená, že P, H, X sú kolineárne. Ďalej platí, že P leží na $(AEHF)$, pretože

$$\measuredangle FPH = \measuredangle FPX = \measuredangle FCX = \measuredangle FCD = \measuredangle FAD$$

Nakoniec si všimnime, že A, Y, P, Z ležia na kružnici

$$\measuredangle ZPY = \measuredangle ZPX + \measuredangle XPY = \measuredangle ZCX + \measuredangle XBY = \measuredangle ACB + \measuredangle CBA = \measuredangle CAB = \measuredangle ZAY.$$

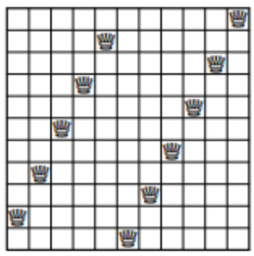
Z čoho vieme

$$\measuredangle PYA = \measuredangle PYB = \measuredangle PEB = \measuredangle PEH = \measuredangle PAH$$

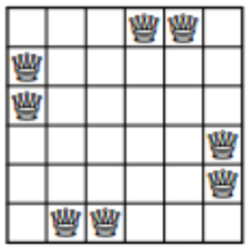
čo nám podľa vety o úsekovom uhle dáva dokazované tvrdenie. □

Úloha 3. *Koľko najviac kráľovien vieme umiestniť na šachovnicu* 1213×1213 *tak, aby každá kráľovná ohrozovala nanajvýš jednu ďalšiu?*

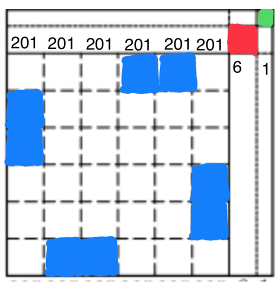
Řešení. Dôkaz uvádzame len pre časť 2. Tvrdím, že maximum je 1617 kráľovien. Uvažujme bipartitný graf riadkov a stĺpcov. Riadok a stĺpec sú spojené hranou, ak je v ňom kráľovná. Podľa podmienok je každý súvislý komponent strom a obsahuje najviac 3 vrcholy. Nech V, E je počet vrcholov, resp. hrán. Následne $E \leq \lfloor \frac{2}{3} V \rfloor = \lfloor \frac{2}{3} \cdot 2426 \rfloor = 1617$. Keďže každá hrana v grafe je kráľovnou v tabuľke, v tabuľke je najviac 1617 kráľovien. Teraz prejdime ku konštrukcii. Rozdeľme si tabuľku na 6×6 tabuliek 201×201 a dva obvodové pásy hrúbky 6 a 1. Do niektorých z 201×201 umiestnime 201 kráľovien nasledovným spôsobom:



Následne umiestnime takto umiestnených 8 kráľovien do štvorčeka 6×6 v obvodovom pásiku.



Celé to následne dáme takto dokopy:



Do modrých políčok 201×201 umiestnime 201 kráľovien. Do červeného 6×6 dáme 8 a do zeleného 1. $\square$