Zadania 6. série

Termín odoslania: 19. 2. 2018

Adresa:
KMS – iKS
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovakia

Úloha C6. Pravidelný n-uholník sme rozdelili pomocou uhlopriečok na $n-2$ trojuholníkov. Koľko najviac z nich môže byť rôznych (nezhodných[1])?

Úloha G6. V ostrouhlom trojuholníku ABC pretína výška z bodu A opísanú kružnicu k v bode D. Nech výšky z bodov B, C pretínajú strany AC, AB v bodoch E, F. Nech H je ortocentrum a T je stred úsečky AH. Priamka rovnobežná s EF prechádzajúca bodom T pretína AB, AC v bodoch X, Y. Dokážte, že $|\sphericalangle XDF| = |\sphericalangle YDE|$.

Úloha N6. Pre prirodzené číslo $k > 1$, nech $f(k)$ je počet spôsobov, ako zapísať k ako súčin prirodzených čísel väčších ako 1, pri čom nezáleží na poradí. Napríklad $f(12) = 4$, lebo 12 sa dá rozložiť týmito 4 spôsobmi: $12,\ 2\cdot 6,\ 3\cdot 4,\ 2\cdot 2\cdot 3$. Dokážte, že ak n je prirodzené číslo väčšie ako 1 a p je prvočíselný deliteľ n, tak $f(n) \le \frac{n}{p}$.

Úloha A6. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ktoré spĺňajú

$$f(x^2 + y) + 1 = f(x^2 + 1) + \frac{f(xy)}{f(x)}$$

pre všetky nenulové reálne x, y také, že $x^2 + y \neq 0$.

[1] Áno aj preklopené, t.j. osovo súmerné trojuholníky sú zhodné