

## Zadání 5. série

**Termín odeslání:** 18. prosinec 2023

**Adresa submitka:** [www.iksco.org/submit](http://www.iksco.org/submit)

**Email pro dotazy:** [info@iksco.org](mailto:info@iksco.org)

**Úloha A5.** Necht  $n \geq 2$  je kladné celé číslo. Pro libovolná kladná celá čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n$  dokažte nerovnost

$$\left\lfloor \frac{a_1^2}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2^2}{a_3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_3^2}{a_4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a_n^2}{a_1} \right\rfloor \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

**Úloha N5.** Rozhodněte, pro která kladná celá čísla  $a, b$  splňující  $a \geq 2b$  existuje nekonstantní polynom  $P(x)$  s koeficienty z množiny  $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$  splňující  $P(b) \mid P(a)$ .

**Úloha C5.** Necht  $m \leq 2024$  je kladné celé číslo. Michal a Matěj hrají hru na tabulce o rozměrech  $1 \times 2024$ , jejíž políčka jsou původně bílé barvy. Hráči se střídají v tazích a začíná Michal. Každý Michalův tah spočívá v tom, že si vybere libovolných  $k \leq m$  bílých políček v tabulce a natře je všechna na černo. Následně si Matěj ve svém tahu vybere několik sousedících černých políček a přetře je všechna na bílo. Jaká je nejmenší hodnota  $m$ , pro kterou Michal může zaručit, že po jednom z jeho tahů bude celá tabulka natřena černě?

**Úloha G5.** Je dán rovnostranný trojúhelník  $ABC$ . Najděte množinu bodů  $P$  takových, že množina délek  $\{|AP|, |BP|, |CP|\}$  jednoznačně určuje délku strany trojúhelníka  $ABC$ , tedy neexistuje rovnostranný trojúhelník  $XYZ$  jiné délky strany, který by splňoval

$$\{|AP|, |BP|, |CP|\} = \{|XP|, |YP|, |ZP|\}.$$