Riešenie 5. série

Úloha G5. *Let ABC be a triangle inscribed in a circle ω and P a variable point on the arc BC of ω not containing vertex A. Denote by I, J the incenters of triangles PAB, PAC, respectively. Prove that as P varies,*

(a) *the circles with diameters IJ all have a common point,*

(b) *the midpoints of the segments IJ all lie on a single circle,*

(c) *the circumcircles of the triangles PIJ all have a common point.*

Riešenie. Stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABC, BCP označme postupne K, R. Švrčkove body[1] trojuholníka ABC prislúchajúce A, B, C označme $\check{S}_A$, $\check{S}_B$, $\check{S}_C$.

(a) Hľadaný bod je K. Toto vyplýva priamo z *Japanese theorem*, ktorá hovorí, že $KIRJ$ je obdĺžnik. Na dôkaz tejto vety stačí použiť iba známu vec, že A, K, I, B a A, K, J, C ležia na kružniciach k_C, k_B so stredmi $\check{S}_C$, $\check{S}_B$. Ďalej je to jednoduchý angle chasing.

(b) Keďže uhlopriečky v obdĺžniku sa rozpoľujú, z už spomenutej Japanese theorem vyplýva, že stred IJ je zároveň stred KR. Teraz načrtneme viacero ciest k riešeniu:

(i) Keďže trajektória stredu IJ je obraz trajektórie bodu R v rovnoľahlosti so stredom v bode K a koeficientom $\frac{1}{2}$, tvrdenie je zrejmé, lebo veľkosť uhla BRC je konštantná.

(ii) Osi úsečiek KI a KJ sú na seba kolmé. Navyše prechádzajú po rade bodmi $\check{S}_C$, $\check{S}_B$ a teda stred IJ sa pohybuje po kružnici nad priemerom $\check{S}_C$, $\check{S}_B$.

(iii) (*podľa Davida Hrušky*) Body I, J sa pohybujú po kružniciach k_C, k_B rovnakou uhlovou rýchlosťou a rovnakým smerom. Preto stred IJ leží na kružnici.[2]

(c) Ponúkame dve riešenia riešiteľov. Obe majú spoločné, že využívajú špirálku.

(i) (*podľa Davida Hrušky*) Označme $\check{S}'_A$ anti-Švrčkov bod[3] a Y prienik $\check{S}'_A K$ s ω rôzny od $\check{S}'_A$. Potom zrejme $|\sphericalangle BYK| = |\sphericalangle KYC|$ a $|\sphericalangle BKC| + |\sphericalangle BYK| = 180°$. Navyše $|\sphericalangle BIK| = |\sphericalangle KJC|$, takže v špirálovej podobnosti so stredom v Y sa zobrazí nie len úsečka BK na úsečku KC, ale aj oblúk kružnice k_C na oblúk k_B nad tými úsečkami (samozrejme tie, ktoré neobsahujú bod A). Ďalej sa zobrazí bod I na J, kvôli už spomínanej rovnakej uhlovej rýchlosti bodov I, J. Teda

$$|\sphericalangle IYJ| = |\sphericalangle BYK| = |\sphericalangle KYC| = \frac{|\sphericalangle BYK| + |\sphericalangle KYC|}{2} = \frac{|\sphericalangle BPC|}{2} = |\sphericalangle IPJ|$$

a hľadaný bod je Y.

(ii) (*podľa Tondy*) Nech H je druhý priesečník kružnice opísanej IJP s ω. Trojice bodov $\check{S}_B$, I, P aj $\check{S}_C$, J, P sú kolineárne, preto H je Miquelov bod štvoruholníka $IJ\check{S}_B\check{S}_C$, a teda stred špirálovej podobnosti zobrazujúci $HI\check{S}_C$ na $HJ\check{S}_B$. Odtiaľ

$$\frac{|H\check{S}_C|}{|H\check{S}_B|} = \frac{|\check{S}_C I|}{|\check{S}_B J|} = \frac{|\check{S}_C A|}{|\check{S}_B A|}.$$

[1] Švrčkov bod v trojuholníku XYZ prislúchajúci vrcholu X je stred oblúka YZ opísanej kružnice neobsahujúceho X.

[2] To, že stred bodov pohybujúcich sa po kružnici tým istým smerom rovnakou uhlovou rýchlosťou sa pohybuje tiež po kružnici vidno asi najľahšie z komplexných čísel, keďže $\frac{z_1+r_1e^{i\phi}+z_2+r_2e^{i\phi}}{2} = \frac{z_1+z_2}{2} + \frac{r_1+r_2}{2}e^{i\phi}$.

[3] Anti-Švrčkov bod je obraz Švrčkovho bodu v stredovej súmernosti podľa stredu príslušnej opísanej kružnice.

Keďže body A, $\check{S}_C$, H, $\check{S}_B$ sú navzájom rôzne (rozmyslite si), tvoria harmonický štvoruholník.[4] Nakoľko AH je symediána trojuholníka $A\check{S}_C\check{S}_B$, bod H je hľadaný pevný bod.

Poznámky opravujúceho. Konfigurácia v úlohe je veľmi známa a často sa vyskytujúca v olympiádach, naposledy napr. na CPS 2012. Hľadaný bod Y v časti (c) je okrem iného dotykový bod *mixti kružnice*[5]. Na zorientovanie sa v konfigurácii odporúčam článok Lemmas in Euclidean geometry na stránke `http://yufeizhao.com/olympiad.html`. *(Filip Sládek)*

Úloha A5. *Let $n \geq 2$. Given that $x_1, \ldots, x_n$ are positive real numbers satisfying $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, determine (in terms of n) the minimal possible value of the expression*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^5}{-x_j + \sum_{k=1}^{n} x_k}.$$

Riešenie (podľa Davida Hrušky). Zadaný výraz označme V. Podľa *Hölderovej nerovnosti*

$$n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^6}{-x_i^2 + x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j} \right) \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^3 = 1,$$

odkiaľ máme odhad $V \geq \frac{1}{n(S^2-1)}$, kde $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Z KA-nerovnosti $S \leq \sqrt{n}$, takže $V \geq \frac{1}{n(n-1)}$. Tento odhad sa aj nadobúda pre $x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Pre úplnosť dodajme, že všetky použité výrazy boli kvôli podmienkam v zadaní kladné a nerovnosti preto korektné. Špeciálne overme roznásobením výrazu S, že $S \geq 1$.

Poznámky opravujúceho. Prišlo veľa rôznych riešení, ktoré ale v princípe všetky používali CS zlomkobijca (v anglickej literaúre Titu's Lemma), alebo Höldera, čo je zase len zovšeobecnený Cauchy-Schwarz. *(Filip Sládek)*

Úloha N5. *Let $n \geq 2$ and let $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + 1$ be a polynomial with positive integer coefficients such that $a_k = a_{n-k}$ for $k = 1, \ldots, n-1$. Prove that there exist infinitely many pairs (x, y) of positive integers such that both $x \mid P(y)$ and $y \mid P(x)$.*

Riešenie. Dvojica $(1, P(1))$ vyhovuje, pričom $1 < P(1)$. Ak teraz $x < y$ a dvojica (x, y) vyhovuje, vytvorme dvojicu $(y, P(y)/x)$. K dokončeniu riešenia zrejme stačí ukázať, že nová dvojica vyhovuje a je v súčte väčšia. To spravíme v nasledujúcich krokoch.

(i) $\frac{P(y)}{x} \in \mathbb{N}$,

(ii) $y + \frac{P(y)}{x} > y + \frac{y^n}{x} > y + x$,

(iii) $\frac{P(y)}{x} \mid P(y)$,

(iv) $P(y) \equiv 1 \pmod{y}$ a čísla x a y sú nesúdeliteľné, preto môžeme písať $\frac{P(y)}{x} \equiv \frac{1}{x} \pmod{y}$ a dopočítame $P\left(\frac{P(y)}{x}\right) \equiv P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} \cdot P(x) \equiv 0 \pmod{y}$.

[4] Harmonický štvoruholník môžme ekvivalentne definovať ako tetivový štvoruholník s vlastnosťou (i) spojnice ľubovoľného bodu kružnice s danými štyrmi bodmi vytvárajú harmonický zväzok, (ii) $ac = bd$, teda súčiny dĺžok protiľahlých strán sa rovnajú, (iii) uhlopriečky sú symediány.

[5] Anglicky mixtilinear circle

Poznámky opravujúceho. Ak je úlohou dokázať existenciu, najľahšia cesta je skonštruovať to :)
(Filip Sládek)

Úloha C5. *Czechoslovakia is a country with at least one village in which some pairs of villages are connected by roads. Mirek the baker founded his M-Bakery company and wants to build stores in several villages (at most one store per village) in such a way that every citizen of Czechoslovakia who can't buy M-croissants in their own village can buy them in one of the neighbouring ones. Prove that the number of ways to do so is odd.*

Řešení. Množině vesnic, do které když umístíme M-pekárny, splníme zadání, budeme říkat vyhovující.

Podíváme se na počet všech uspořádaných dvojic disjunktních množin vesnic (X, Y) takových, že mezi X a Y nevede žádná cesta. Tento počet je lichý, jelikož můžeme dát každou takovou dvojici do páru s obrácenou dvojicí s jedinou výjimkou – dvojice prázdných množin. Nyní zkusme dostat tento počet jako součet přes všechny možné množiny X. Pokud je X vyhovující, máme jedinou možnost (lichý počet!), jak zvolit Y – prázdnou. V opačném případě je počet možností 2^n (sudý počet!), kde n je počet vesnic, které nesousedí s X (ani v ní neleží). Aby tento součet vyšel lichý, musí být lichý i počet vyhovujících množin.

Poznámky opravujícího. Když jsem si úlohu řešil já, zkusil jsem na ní z hlavy poštvat PIE (princip inkluze a exkluze) nebo indukci, ale ani jedno mi jednoduše nevyšlo. Tak jsem si zbaběle řekl o řešení. Aj, že jsem si s tím nehrál o chvíli déle… „Vždyť je to tak jednoduché. Šlo na ten trik přijít? Přijdou na to naši řešitelé?“ přemítal jsem.

Po dobu velkých cen jsem se snažil přesvědčovat řešitele, ať se této úlohy nebojí, avšak přišla během nich pouze dvě řešení, obě postavená na PIE a indukci. Jen byla poněkud delší než to vzorové. Z toho jsem usoudil, že na trikové řešení přijít asi bohužel nešlo. Zvrat nastal až při opravdovém deadlinu, kdy nám dvě minuty před půlnocí přišla řešení od Xellose, spolu se vzorovým C5.

Pane jo! Jak se mu to povedlo? Jeho odpověď na tuto otázku mě pobaví, kdykoli si na ni vzpomenu: „C5 som dal cez tyzden-dva sustredenia sa na prazdnu mnozinu a moment oziarenia par hodin pred deadlinom :D“

A pak že teorie množin není náboženství. *(Mirek Olšák)*