Řešení 3. série

Úloha C3. *Je dáno přirozené číslo n. Z každé posloupnosti n nul a jedniček vyrobíme rovnostranný trojúhelník z nul a jedniček tak, že vždy do následujícího řádku mezi čísla x a y napíšeme $x + y \pmod 2$. Např. pro $n = 5$ a posloupnost 01101 bude výsledný trojúhelník vypadat takto:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 \\ & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 1 & & 0 & & \\ & & & 0 & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & \end{array}$$

Určete počet posloupností nul a jedniček délky n takových, že v každém řádku takto vzniklého trojúhelníku bude sudý počet jedniček.

Řešení. Keďže v trojuholníku sa vyskytujú iba jednotky a nuly, párny počet jednotiek v riadku trojuholníka je ekvivalentný s tým, že súčet riadku je párny.

Riadky si očíslujme odspodu, teda tak, že riadok 1 je najspodnejší a riadok n najvrchnejší. Platí nám, že riadok číslo i obsahuje presne i čísel.

Majme teraz dva susedné riadky m a $m+1$ a označme hodnoty v kratšom (spodnom) riadku a_1 až a_m a hodnoty v dlhšom (hornom) b_1 až b_{m+1}. Pre všetky i od 1 do m platí $a_i = b_i + b_{i+1}$, čím hovoríme, že každé číslo je súčtom dvoch čísel nad ním v trojuholníku. Keď sčítame všetky a_i, dostaneme

$$0 \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_m = (b_1 + b_2) + (b_2 + b_3) + \cdots + (b_m + b_{m+1}) \equiv b_1 + b_{m+1} \pmod 2.$$

Nekrajné členy horného riadku prispievajú do súčtu spodného riadku (ktorý je párny) dvakrát – raz sa pričítajú do člena vľavo dole a raz do člena vpravo dole. Krajné prispievajú iba raz. Ak je súčet spodného riadku párny, znamená to, že prvý a posledný člen horného riadku majú párny súčet, a teda sú rovnaké.

Túto úvahu vieme urobiť pre všetky riadky 1 až $n - 1$ trojuholníka a dostať tak, že každý z riadkov 2 až n má krajné členy rovnaké. Platí to aj pre posledný riadok, pretože preň je prvý a posledný člen jeho jediný člen.

Keď poznáme krajné členy a spodný riadok, vieme celý horný riadok dopočítať. Postupujeme z niektorého kraja a poznáme vždy jeden sčítanec a súčet, takže vieme dopočítať druhý sčítanec (modulo 2).

Teraz môžeme indukciou ukázať, že všetky riadky trojuholníka vyhovujúceho zadaniu sú symetrické (palindrómy) a navyše nepárne riadky majú v strede nulu. Nepárny riadok má nepárnu dĺžku a ak je symetrický a má párny súčet, v jeho strede musí byť párne číslo (nula). Všetky ostatné členy totiž vieme popárovať postupujúc z kraja, vždy spárujeme dve rovnaké hodnoty. Len pridanie nuly vie vyrobiť párny súčet. Stačí teda dokazovať symetrickosť.

Pre riadok $m = 1$ tvrdenie platí, musí obsahovať číslo 0, aby mal párny súčet. Jednoprvková postupnosť je symetrická.

Predpokladajme teraz, že platí pre riadok m a dokážme ho pre $m + 1$. Krajné členy riadku $m+1$ sú rovnaké a ukázali sme si, že ostatné členy vieme dopočítať. Zo symetrie spodného riadku, rovnosti krajných čísel a symetrie sčítania plynie, že aj riadok $m + 1$ bude symetrický. Zhodným výpočtom spočítame druhý a predposledný člen, potom zhodným výpočtom spočítame tretí a predpredposledný a tak ďalej. Všetky riadky trojuholníka teda musia byť symetrické.

Ďalej ukážeme, že všetky trojuholníky vyrobené zo symetrickej postupnosti dĺžky n (s nulou v strede pri nepárnom n) vyhovujú zadaniu. Súčet každého takéhoto riadku je zrejme párny (opäť párujeme členy). Z riadku vieme vypočítať nasledujúci a vďaka symetrii riadku a symetrii sčítania musí byť symetrický aj ten nasledujúci riadok. Ak má nepárnu dĺžku, jeho stredný člen vznikol sčítaním dvoch stredných členov symetrického riadku párnej dĺžky, teda dvoch rovnakých čísel, čiže je rovný 0. Všetky riadky vyjdú symetrické, nepárne majú v strede nulu, takže súčty sú všade párne.

Ostáva určiť počet možností. Potrebujeme vyrobiť symetrickú postupnosť – pre párne n vieme určiť polovicu postupnosti ľubovoľne, druhá je tým jednoznačne určená; pre nepárne n musíme dať do stredu nulu a volíme polovicu zvyšku. Pre každú pozíciu máme dve možnosti, takže počet možností je $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, kde $\lfloor x \rfloor$ je dolná celá časť čísla x.

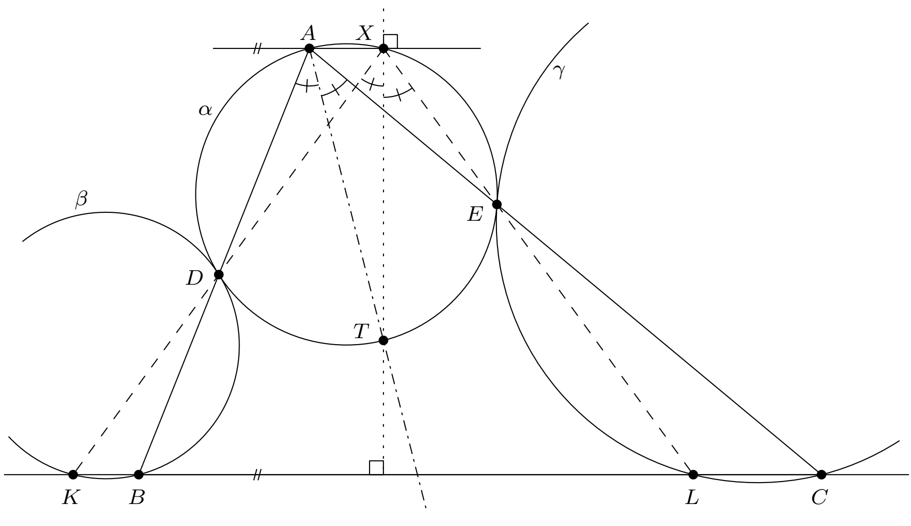
Poznámky opravujúciho. Väčšina riešení postupovala podobne ako vzorové riešenie. Pri riešení, akým je toto, je dôležité aj zdôvodniť, že všetky symetrické postupnosti naozaj vyhovujú. Prvá časť totiž dokazuje len to, že postupnosť musela byť symetrická (ide len o jednu implikáciu, nie o ekvivalenciu).

Niektoré riešenia v indukcii rovno dokazovali, že počet možností sa dvakrát zvýši pridaním riadku párnej dĺžky a nezmení sa pridaním riadku nepárnej dĺžky. V takom prípade nepočítame počet symetrických postupností dĺžky n, ale už priamo dokazujeme počet možných trojuholníkov, takže netreba dokazovať, že všetky symetrické postupnosti vyhovujú. *(Michal Staník)*

Úloha G3. *Je dán trojúhelník ABC. Na ose úhlu BAC zvolme bod $T \neq A$ a kružnici nad průměrem AT označme α. Strana AB protíná α v bodě $D \neq A$ a kružnice β se dotýká α v bodě D a navíc prochází bodem B. Obdobně AC protíná α podruhé v E a následně se kružnice γ dotýká α v E a prochází bodem C. Přímka BC nyní protíná kružnici β v bodě $K \neq B$ a kružnici γ v bodě $L \neq C$. Dokažte, že $|TK| = |TL|$.*

Řešení. Označme jako X bod ležící na α takový, že $AX \parallel BC$.

Uvažme stejnolehlost zobrazující kružnici β na kružnici α. Dokážeme, že K se zobrazí na X. Protože se tyto kružnice dotýkají v bodě D, je D středem této stejnolehlosti. Obraz bodu B je průsečík BD s α, tedy A. Obraz přímky BC musí být s BC rovnoběžný a zároveň procházet bode A. Je to tedy přímka AX. Protože K je průsečíkem β a BC různým od B, musí být jeho obraz průsečíkem α a AX různý od A, což je X, jak jsme chtěli (poznamenejme, že když je trojúhelník ABC rovnoramenný, tak $X = A$ a AX je tečna k α a $K = B$, neboť β nemá s BC jiný průsečík).



Obdobně dokážeme, že se na X ve stejnolehlosti zobrazující γ na α zobrazí L. Tato stejnolehlost má střed E.

Protože AT je průměr α a $X \in \alpha$, platí $TX \perp AX \parallel BC$, tedy $TX \perp BC$. Z obvodových úhlů, toho, že X, D a K leží na přímce, obdobně X, E a L leží na přímce, a že T leží na ose úhlu BAC, platí

$$|\sphericalangle TXK| = |\sphericalangle TXD| = |\sphericalangle TAD| = |\sphericalangle TAE| = |\sphericalangle TXE| = |\sphericalangle TXL|.$$

Přímka TX je tudíž v trojúhelníku XKL zároveň výškou a osou úhlu, tudíž tento trojúhelník musí být rovnoramenný. Přímka TX je také osou strany KL, takže i trojúhelník TKL je rovnoramenný a $|TK| = |TL|$, jak jsme chtěli.

Poznámky opravujícího. Většina řešitelů úlohu nějakým způsobem vyúhlila, což bylo sice možné, potom se ale musí řešit různá pořadí bodů B, C, K, L na přímce, buď rozborem případů nebo použitím orientovaných úhlů. Také to vyžadovalo daleko více počítání než vzorové řešení. Několik řešení postupovalo stejně jako vzorové. *(Magdaléna Mišinová)*

Úloha A3. *Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro něž platí, že kdykoliv reálná čísla a, b, c splňují $a + f(b) + f(f(c)) = 0$, pak i*

$$f(a)^3 + bf(b)^2 + c^2 f(c) = 3abc.$$

Řešení. Všetky dosadenia spĺňajú podmienku v zadaní.

Na začiatok poďme dokázať $f(0) = 0$.

Dosadzujeme:

$$[-f(0) - f(f(0)), 0, 0] \qquad f(-f(0) - f(f(0)))^3 = 0$$

označme $s = -f(0) - f(f(0))$:

$$[-f(f(0)), s, 0] \qquad f(-f(f(0)))^3 = 0$$

označme $t = -f(f(0))$:

$$[-f(0), s, s] \qquad f(-f(0))^3 = 3(-f(0))s^2 \tag{1}$$

$$[-f(0), s, t] \qquad f(-f(0))^3 = 3(-f(0))st \tag{2}$$

$$[-f(0), t, t] \qquad f(-f(0))^3 = 3(-f(0))t^2 \tag{3}$$

Všimnime si, že ľavé strany sú rovnaké a pravé veľmi podobné a teda je tam silné podozrenie, že $s = t$ alebo $f(0) = 0$. Naozaj, kombináciou rovníc $[(1) - 2 * (2) + (3)]$ a uprataním členov získame:

$$f(0)(t - s)^2 = 0$$

$$f(0)(f(0))^2 = 0$$

a teda naozaj $f(0) = 0$.

Ďalej sa zaoberajme iba prípadmi $x \neq 0$ a poďme dokázať $f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ alebo $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Dosadzujme s využitím $f(0) = 0$:

$$[-f(f(x)), 0, x] \qquad f(-f(f(x)))^3 + x^2 f(x) = 0 \tag{4}$$

$$[-f(f(x)), f(x), 0] \qquad f(-f(f(x)))^3 + f(x)f(f(x))^2 = 0$$

odčítaním rovníc získame:

$$f(x)(x^2 - f(f(x))^2) = 0$$

teraz máme 2 možnosti.

Predpokladajme najprv, že existuje $u \neq 0, f(u) = 0$.

$$\begin{array}{ll} [-f(x), x, 0] & f(-f(x))^3 + xf(x)^2 = 0 \\ [-f(x), x, u] & f(-f(x))^3 + xf(x)^2 = 3(-f(x))ux \end{array}$$

odčítaním rovníc získame

$$0 = 3(-f(x))ux$$

Keďže $u \neq 0, x \neq 0$, tak $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, čo je naozaj aj jedno riešenie.

Teraz sa zaoberajme $f(x) \neq 0$ pre $x \neq 0$, z čoho vyplýva $f(f(x)) = x^2$. Nech $f(f(x)) = -x$, zo (4) máme

$$\begin{aligned} f(-f(f(x)))^3 + x^2 f(x) &= 0 \\ f(x)^3 + x^2 f(x) &= 0 \\ f(x)^2 + x^2 &= 0 \end{aligned}$$

a to je spor s $x \neq 0$, preto platí $f(f(x)) = x$.

$f(f(x)) = x$ implikuje, že f je bijektívna a teda môžeme upraviť zadanie na iný tvar substitúciou $d = f(b)$:

$$a + d + c = 0 \quad \Rightarrow \quad f(a)^3 + d^2 f(d) + c^2 f(c) = 3af(d)c$$

Vidíme, že zámenou d a c sa ľavá strana rovnice nemení a aj to využijeme dosadením $[-x-y, x, y]$, $[-x - y, y, x]$ a porovnaním pravých strán:

$$\begin{aligned} 3(-x - y)f(x)y &= 3(-x - y)f(y)x \\ (x + y)(f(x)y - f(y)x) &= 0 \end{aligned}$$

dosadením $x \neq -1, y = 1$ dostávame:

$$f(x) = xf(1)$$

prípad $x = -1$ vyriešime dosadením $x = -1, y = 2$:

$$\begin{aligned} f(-1)2 &= -1f(2) = -1 * 2f(1) \\ f(-1) &= -1f(1) \end{aligned}$$

a teda $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$. Z $f(f(x))$ dostávame $c = \pm 1$ a kandidátov $f(x) = x$ a $f(x) = -x$, čo sú spolu s $f(x) = 0$ všetky riešenia zadania. *(Miro Psota)*

Úloha N3. *Pro přirozené číslo $n > 1$ označme největší prvočíslo, jež dělí n, jako $F(n)$. Dvojici různých prvočísel $\{p, q\}$ nazvěme* sladěnou, *pokud pro nějaké přirozené číslo $n > 1$ platí $F(n)F(n + 1) = pq$. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho dvojic různých prvočísel, které nejsou sladěné.*

Řešení. Nesladěné dvojice prvočísel budeme hledat ve tvaru $\{2, q\}$. Začneme lemmatem, které nám umožní pouze zkoumat řády 2 modulo různá prvočísla. Připomeňme, že pro $p \nmid a$ *řád* a modulo p je to nejmenší přirozené číslo k splňující $a^k \equiv 1 \pmod{p}$. Značíme $\operatorname{ord}_p(a) = k$.

Lemma 1. Nechť pro lichá prvočísla $p > q$ platí $\operatorname{ord}_p(2) = \operatorname{ord}_q(2)$. Potom dvojice $\{2, q\}$ není sladěná.

Důkaz. Pro spor nechť je $\{2, q\}$ sladěná. Jelikož 2 je nejmenší prvočíslo, $F(n) = 2$ může platit pouze pro $n = 2^k$. Z $F(n)F(n+1) = 2q$ je tedy n rovno 2^k nebo $2^k - 1$, takže máme $q = F(2^k \pm 1)$.

Nejprve uvažujme $q = F(2^k - 1)$. Pak určitě $q \mid 2^k - 1$, což je z vlastností řádu ekvivalentní $\operatorname{ord}_q(2) \mid k$. Pak ale i $\operatorname{ord}_p(2) \mid k$, takže $p \mid 2^k - 1$. Pak tedy q není největší prvočíselný dělitel $2^k - 1$, což je spor.

Podobně vyřešíme případ $q = F(2^k + 1)$. Potom platí $q \mid (2^k + 1)(2^k - 1) = 2^{2k} - 1$, takže $\operatorname{ord}_q(2) \mid 2k$, ale zároveň $\operatorname{ord}_q(2) \nmid k$ (díky $2^k \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{q}$). To znamená, že platí totožné vztahy pro $\operatorname{ord}_p(2)$. Tudíž $p \mid (2^k + 1)(2^k - 1)$, ale $p \nmid 2^k - 1$, což už značí $p \mid 2^k + 1$. Opět tedy máme spor, což už dohromady značí, že dvojice $\{2, q\}$ není sladěná. $\square$

Nyní tedy stačí najít nekonečně mnoho dvojic prvočísel, modulo která má 2 stejný řád. Ty najdeme jako prvočinitele $2^{2r} + 1$ pro velká prvočísla r.

Lemma 2. Je-li r liché prvočíslo a $2^{2r} + 1$ je násobkem prvočísla $q > 5$, pak $\operatorname{ord}_q(2) = 4r$.

Důkaz. Obdobně jako v důkazu prvního lemmatu máme $q \mid 2^{4r} - 1$, ale $q \nmid 2^{2r} - 1$. To znamená $\operatorname{ord}_q(2) \mid 4r$, ale $\operatorname{ord}_q(2) \nmid 2r$. Z prvočíselnosti r má $4r$ právě šest dělitelů 1, 2, 4, r, $2r$ a $4r$. Z podmínky $\operatorname{ord}_q(2) \nmid 2r$ jsou vyloučena 1, 2, r a $2r$, takže zbývá jen 4 a $4r$. Kdyby však $\operatorname{ord}_q(2) = 4$, znamenalo by to $q \mid 2^4 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$, což vzhledem ke $q > 5$ nemůže platit. Nutně tak $\operatorname{ord}_q(2) = 4r$. $\square$

Nyní tedy stačí dokázat, že pro dostatečně velká prvočísla r má $2^{2r} + 1$ alespoň dva různé prvočíselné dělitele větší než 5. Nejprve vyřešme, jak moc může být $2^{2r} + 1$ dělitelné malými prvočísly. Je to liché číslo a modulo 3 dává zbytek 2. Pro pětku použijeme Lifting the exponent lemma: z něj pro liché prvočíslo $r > 5$ dostaneme

$$v_5(2^{2r} + 1) = v_5(4^r + 1) = v_5(4 + 1) + v_5(r) = 1 + 0 = 1.$$

Tedy 5-valuace je omezená, takže pro velká prvočísla r bude mít $2^{2r} + 1$ prvočíselné dělitele větší než 5. Zbývá tak ukázat, že bude mít alespoň dva různé takové prvočíselné dělitele. Z identity Sophie Germain máme rozklad

$$\begin{aligned} 2^{2r} + 1 = 1^4 + 4 \cdot \left(2^{\frac{r-1}{2}}\right)^4 &= \left(1 + 2 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} + 2 \cdot 2^{r-1}\right)\left(1 - 2 \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} + 2 \cdot 2^{r-1}\right) = \\ &= \left(2^r + 2^{\frac{r+1}{2}} + 1\right)\left(2^r - 2^{\frac{r+1}{2}} + 1\right). \end{aligned}$$

Pro $r > 5$ jsou určitě obě závorky větší než 5. Z omezené 5-valuace tedy musí každá mít nějakého prvočíselného dělitele většího než 5. Kdyby to pro spor byl ten samý prvočíselný dělitel q, nutně by dělil také

$$\left(2^r + 2^{\frac{r+1}{2}} + 1\right) - \left(2^r - 2^{\frac{r+1}{2}} + 1\right) = 2^{\frac{r+3}{2}},$$

což je mocnina dvojky. To je spor, každá ze závorek v rozkladu tak musí mít jiného prvočíselného dělitele většího než 5.

Každé takové $2^{2r} + 1$, kde r je některé z nekonečně mnoha prvočísel větších než 5, nám tak dává dvojici různých prvočísel $p > q$ takových, že $\operatorname{ord}_p(2) = \operatorname{ord}_q(2) = 4r$. Potom dvojice $\{2, q\}$ není sladěná. Každé takové q získané z r má $\operatorname{ord}_q(2) = 4r$, takže speciálně jsou takto získaná q pro různá r také různá. Tím máme jistotu, že žádné q nedostaneme vícekrát.

Poznámky opravujícího. Většina došlých řešení v různých podobách odhalila, že se vyplatí zaměřit se na dvojice $\{2, q\}$ a že se hodí mít dvě prvočísla $p > q$ s rovností $\operatorname{ord}_p(2) = \operatorname{ord}_q(2)$, nebo aspoň s dělitelností $\operatorname{ord}_p(2) \mid \operatorname{ord}_q(2)$, za což je chválím. Konstrukci vhodných dvojic (p, q) však úspěšně dotáhl málokdo. Některá řešení skončila na tom, že u některých šikovných množin čísel (třeba složená Mersennova čísla s prvočíselnými exponenty nebo prvočísla Sophie Germain) se neví, zda jsou nekonečné.

Jedno řešení též úlohu úspěšně zdolalo pomocí prvočíselné věty a analytických odhadů na $F(2^n \pm 1)$. *(Matěj Doležálek)*