Zadání 6. série

Termín odeslání: 26. 1. 2015

Adresa pro odeslání:
Korespondenční seminář iKS
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Czech Republic

Úloha A6. Patrik vymyslel funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a shledal, že pro všechna reálná čísla x, y splňuje

$$f(f(x) + x + y^2) = 2x + f(y)^2.$$

Najděte všechny možnosti, jaká mohla být Patrikova funkce.

Úloha C6. $2n + 1$ hráčů ($n \geq 1$) hraje turnaj v ping-pongu. Přitom má hrát každý s každým právě jednou a všechny zápasy se odehrají postupně na jednom stole. Rozhodli se hrát v takovém pořadí, aby mezi každými dvěma zápasy jednoho hráče bylo alespoň $n-1$ jiných zápasů. Dokažte, že jeden z hráčů, který hraje první zápas ze všech musí nutně hrát i poslední zápas ze všech.

Úloha G6. Je dán úhel o velikosti α s hlavním vrcholem A sevřený mezi polopřímkami u_1, u_2 vychazejícími z A. Uvnitř úhlu u_1u_2 je dán bod B neležící na jeho ose a dále je dána velikost úhlu β ($\alpha < \beta < 180°$). Uvažme všechny možné dvojice bodů X, Y takové, že $X \in u_1$, $Y \in u_2$, A leží mimo úhel XBY a $|\sphericalangle XBY| = \beta$. Pak každý z bodů A, B má tu vlastnost, že vidí úsečku XY pod stále stejným úhlem. Dokažte, že existuje třetí bod s touto vlastností.

Úloha N6. Polynom p s celočíselnými koeficienty $n \geq 1$ proměnných má stupeň[1] ostře menší než n. Uvažme všechny uspořádané n-tice celých čísel $x_1, \ldots, x_n$ takové, že

$$p(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{11} \text{ a pro všechna } x_i \text{ platí } 1 \leq x_i \leq 11.$$

Dokažte, že počet všech takových n-tic je dělitelný jedenácti.

[1] Stupeň polynomu p více proměnných je roven nejvyššímu součtu exponentů u některého členu polynomu. Tedy například polynom $p(x, y) = x^3y + y^2$ má stupeň 4.