Řešení 3. série

Úloha C3. *Je dán graf s n vrcholy a q hranami, které jsou v nějakém pořadí očíslovány $1, \dots, q$. Řekneme, že tah[1] v grafu je* rostoucí*, pokud čísla jeho hran tvoří rostoucí posloupnost. Dokažte, že v grafu existuje rostoucí tah tvořený alespoň $\frac{2q}{n}$ hranami.*

Řešení. Do každého vrcholu umístíme vojáčka. Plukovník bude postupně vyvolávat čísla 1 až q. Když vyvolá číslo i, tak vojáčci na vrcholech i-té hrany přeběhnou po hraně a prohodí se. Dohromady tedy vojáčci uběhnou vzdálenost $2q$. Takže alespoň jeden z nich uběhne vzdálenost alespoň $\frac{2q}{n}$, ale protože plukovník vyvolává čísla v rostoucím pořadí, tento vojáček uběhne rostoucí tah délky alespoň $\frac{2q}{n}$.

Alternativní řešení. Zkusíme si rozmyslet, kdy by tvrzení mohlo neplatit. Budeme postupně přidávat hrany se vzrůstajícími čísly a jediná místa, kde by se to mohlo pokazit je, že přidáváme k-tou hranu a

$$\left\lceil \frac{2(k-1)}{n} \right\rceil < \left\lceil \frac{2k}{n} \right\rceil = a. \tag{1}$$

Buď před přidáním k-té hrany už graf obsahoval tah délky a a je to dobrý, nebo tam tu hranu přidáme a musíme doufat, že se objeví tah délky a. Nově přidaná hrana mezi vrcholy u, v určitě prodlouží tahy končící v u a v, takže aby se to pokazilo, musí ve vrcholech u i v končit tah délky nejvýše $a-2$ a zároveň ve všech ostatních vrcholech budou končit tahy délek nejvýše $a-1$. Dáme to dohromady a zjistíme, že pro součet přes všechny vrcholy délek nejdelších tahů končících v těch vrcholech, který označíme S, platí

$$S \le (n-2)(a-1) + 2(a-2) = an - 2 - n.$$

Teď využijeme rovnost 1 a z ní plynoucí nerovnosti

$$\begin{aligned} a - 1 &< \frac{2k}{n}, \\ an - n &< 2k, \\ S &\le an - n - 2 < 2k - 2, \\ S &< 2(k-1). \end{aligned}$$

Na druhou stranu jsme si už výše uvědomili, že přidáním hrany spojující vrcholy u a v, prodloužíme nejdelší tah končící v u i v, takže po přidání prvních $k-1$ hran musí platit $S \ge 2(k-1)$; proto se to nikdy nepokazí a tvrzení platí.

Poznámky opravujícího. Naprostá většina došlých řešení (tři) využila stejnou myšlenku jako alternativní řešení a indukcí dokazovala, že součet délek nejdelších tahů po přidání k-té hrany je alespoň $2k$, z čehož z Dirichletova principu plyne dokazované tvrzení. Alternativní vzorák se pokusil na totéž jít z opačné strany a jakože přirozeně došel k tomu, že nás zajímá součet délek nejdelších tahů končících v jednotlivých vrcholech. Obecně je v teorii grafů asi nejobvyklejší dokazovací technika indukce, tak není špatný nápad ji v úlohách hledat. *(Vašek Voráček)*

Úloha N3. *Je dána funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro libovolná $a, b \in \mathbb{N}$ platí, že $\max\{f(a), b\}$ je násobkem čísla $f(ab)$. Rozhodněte, zdali musí existovat nekonečně mnoho přirozených čísel k takových, že $f(k) = 1$.*

Řešení. Sporem ukážeme, že existuje nekonečně mnoho $k \in \mathbb{N}$ splňujících $f(k) = 1$. Předpokládejme, že jich existuje konečně mnoho, a největší z nich označme $k_{\max}$. Pro všechna $n > k_{\max}$ potom platí $f(n) \neq 1$.

[1] Tedy taková posloupnost hran, v níž se žádné hrany neopakují a lze je v daném pořadí nakreslit jedním tahem.

Uvažujme libovolné liché prvočíslo $p > \max\{f(1), k_{\max}\}$, ze zadání platí

$$f(1 \cdot p) \mid \max\{f(1), p\} = p.$$

Jediní dělitelné p jsou 1 a p, ale $f(p) \neq 1$, takže $f(p) = p$.

Nyní indukcí ukážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí $f(2^n p) = p$. Pro $n = 0$ už jsme tvrzení dokázali, dále předpokládejme $f(2^n p) = p$. Nyní můžeme upravit

$$f(2^{n+1}p) = f(2^n p \cdot 2) \mid \max\{f(2^n p), 2\} = \max\{p, 2\} = p.$$

Zřejmě $2^{n+1}p > p > k_{\max}$, takže $f(2^{n+1}p) \neq 1$, a proto $f(2^{n+1}p) = p$.

Uvažujme n takové, že $2^n > p$, potom platí

$$p = f(p \cdot 2^n) \mid \max\{f(p), 2^n\} = 2^n.$$

To je ovšem spor, existuje tedy nekonečně mnoho $k \in \mathbb{N}$ takových, že $f(k) = 1$.

(Pepa Minařík)

Úloha A3. *Je dáno reálné číslo $1 < t < 2$. Dokažte, že pro každé dostatečně vysoké přirozené číslo n lze zvolit $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ tak, že*

$$\left|\varepsilon_n t^n + \varepsilon_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \varepsilon_1 t + \varepsilon_0 - 2020\right| \leq 1.$$

Řešení. Úloha od nás chce, aby sme „nastavili" znamienka pred mocninami t^k tak, aby výraz $\varepsilon_n t^n + \cdots + \varepsilon_0 t^0$ bol čo najbližšie k 2020, kde ε_k predstavujú znamienka + alebo −. Rozumne vyzerá, keď znamienka určíme v poradí od veľkých mocnín t^k po menšie mocniny t^k, pretože pomocou veľkých mocnín t^k sa akoby nastavíme blízko ku 2020 a potom budeme vedieť aké znamienka dať pred malé mocniny aby sme to doladili už presne.

Povedzme, že už máme určené $\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_k$, označíme si výraz

$$S_k = \varepsilon_n t^n + \cdots + \varepsilon_k t^k - 2020.$$

Teraz určíme ε_{k-1} tak, že ak $S_k \leq 0$, tak $\varepsilon_{k-1} = 1$ a ak $S_k > 0$, tak $\varepsilon_{k-1} = -1$, teda aby sme s výrazom $S_{k-1} = S_k + \varepsilon_{k-1}t^{k-1}$ ostali čo najbližšie pri 0. To, že ako blízko pri 0 sme, vyjadríme matematicky a dokážeme indukciou.

Povedzme si ešte, že naše dostatočne veľké n bude také, aby platilo $t^n > 2020$. Táto vlastnosť sa ďalej využije len na jednom mieste v dôkaze, všimnite si kde.

Lema. Pre dostatočne veľké n vieme nastaviť $\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_k$ tak, aby

$$|S_k| = |\varepsilon_n t^n + \cdots + \varepsilon_k t^k - 2020| \leq t^k.$$

Dôkaz. Indukciou podľa k zostupne. Pre $k = n$ máme $|t^n - 2020| = t^n - 2020 < t^n$. Teraz predpokladajme, že Lema platí pre k a chceme ju dokázať pre $k - 1$. Potrebujeme dokázať $|S_{k-1}| = |S_k + \varepsilon_{k-1}t^{k-1}| \leq t^{k-1}$. Rozoberme dva prípady.

- Ak $S_k > 0$, potom $S_{k-1} = S_k - t^{k-1}$ a platí

$$-t^{k-1} \leq S_k - t^{k-1} \leq t^k - t^{k-1} = (t-1)t^{k-1} \leq t^{k-1},$$

  pričom prvá nerovnosť platí vďaka $S_k > 0$, druhá z indukčného predpokladu vďaka $S_k \leq t^k$ a tretia vďaka $t - 1 \leq 1$. Takže sme skutočne dostali $|S_{k-1}| = |S_k - t^{k-1}| \leq t^{k-1}$.

- Ak $S_k \leq 0$, potom $S_{k-1} = S_k + t^{k-1}$ a platí

$$-t^{k-1} \leq -(t-1)t^{k-1} = -t^k + t^{k-1} \leq S_k + t^{k-1} \leq t^{k-1},$$

  pričom prvá nerovnosť platí vďaka $t - 1 \leq 1$, druhá z indukčného predpokladu vďaka $S_k \geq -t^k$ a tretia vďaka $S_k \leq 0$. Takže sme opäť dostali $|S_{k-1}| \leq t^{k-1}$. □

Teraz už len stačí zvoliť $k = 0$, dokázali sme $|S_0| \leq t^0 = 1$, a teda dostávame

$$|\varepsilon_n t^n + \cdots + \varepsilon_0 t^0 - 2020| \leq 1.$$

(Tomáš Sásik)

Úloha G3. *Budiž ABC ostroúhlý trojúhelník se středem O kružnice opsané a těžištěm G. Nechť je D střed úsečky BC a E bod na kružnici s průměrem BC, který zároveň splňuje $AE \perp BC$. Dále nechť je F průsečík přímek EG, OD a body K, L nechť leží na přímce BC tak, že $FK \parallel OB$, $FL \parallel OC$. Body M, N nechť leží po řadě na přímkách AB, AC tak, že $MK \perp BC$, $NL \perp BC$. Konečně nechť je ω kružnice, která se dotýká přímek OB, OC po řadě v bodech B, C. Dokažte, že kružnice opsaná AMN se dotýká ω.*

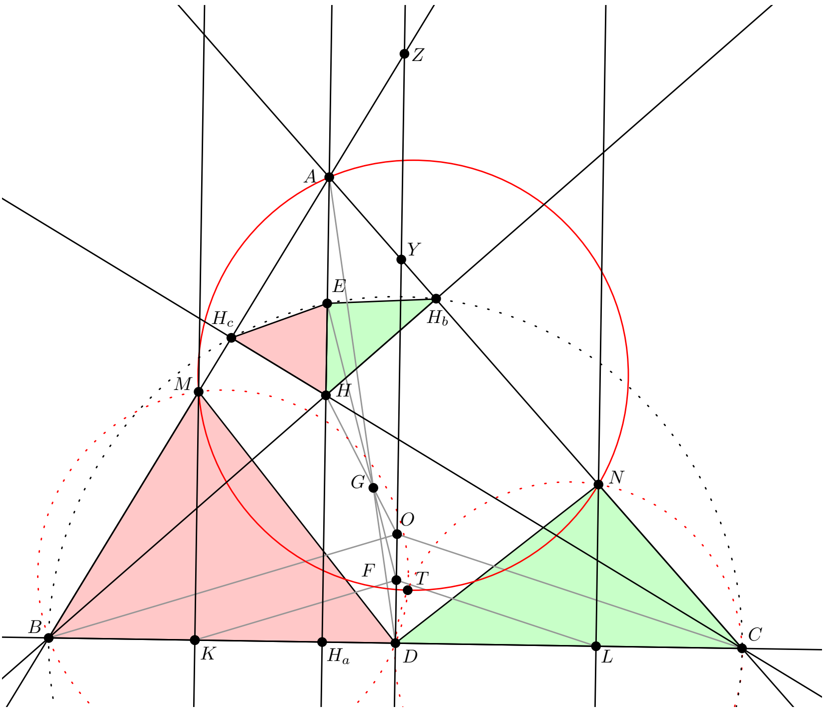
Řešení. Označme H ortocentrum ABC a H_a, H_b, H_c postupně paty z vrcholů A, B, C. Označme Y, Z průsečíky OD postupně s AC a AB. Pak $\triangle AHH_b \sim \triangle ACH_a \sim \triangle YCD$. Ze stejnolehlosti skrz G je $\frac{|AE|}{|HE|} = \frac{|DF|}{|OF|}$. Dále rovnoběžkovým promítáním

$$\frac{|DF|}{|OF|} = \frac{|DL|}{|CL|} = \frac{|YN|}{|CN|}.$$

Tedy celé útvary AHH_bE a $YCDN$ jsou podobné, tedy speciálně $\triangle EHH_b \sim \triangle NCD$. Z této podobnosti a obvodových úhlů tedy $|\sphericalangle CDN| = |\sphericalangle EH_bH| = |\sphericalangle ECB|$, jelikož H_b leží na kružnici s průměrem BC. Analogicky dostaneme, že $|\sphericalangle MDB| = |\sphericalangle EBC|$, tedy

$$|\sphericalangle MDB| + |\sphericalangle CDN| = 90^\circ.$$

Takže $|\sphericalangle MDN| = 90^\circ$.



Označme $V = OD \cap MN$. Protože $|DL| = |DK|$, tak z rovnoběžností $|VN| = |MV|$, tedy V je střed MN. Protože je trojúhelník MDN pravoúhlý, tak V je střed kružnice opsané (MDN). Zároveň $OD \perp BC$, tedy kružnice opsaná (MDN) se dotýká BC v D.

Označme T průsečík[2] kružnic (AMN), (BMD), (CDN). Pak

$$
\begin{aligned}
|\sphericalangle BTC| &= 360^\circ - (|\sphericalangle MTB| + |\sphericalangle CTN|) - |\sphericalangle MTN| = \\
&= 360^\circ - (|\sphericalangle MDB| + |\sphericalangle CDN|) - (180^\circ - |\sphericalangle BAC|) = \\
&= 360^\circ - (90^\circ) - 180^\circ + |\sphericalangle BAC| = 90 + |\sphericalangle BAC|.
\end{aligned}
$$

Označíme S střed ω. Pak $|\sphericalangle BSC| = 180 - 2|\sphericalangle BAC|$. Tedy z obvodového úhlu leží T na ω. Nyní již dokážeme pomocí úsekového úhlu na kružnici (MDN), že se ω a (AMN) dotýkají v T. Označme θ úhel mezi tečnami v T ke kružnicím ω a (AMN). Platí

$$
\begin{aligned}
|\sphericalangle CTN| \pm \theta &= |\sphericalangle CBT| + |\sphericalangle TMN| = |\sphericalangle DMT| + |\sphericalangle TMN| = \\
&= |\sphericalangle DMN| = |\sphericalangle CDN| = |\sphericalangle CTN|.
\end{aligned}
$$

(Radek Olšák)

[2] Říká se mu Miquelův bod M, N, D vzhledem k ABC.