Řešení 1. série

Úloha A1. *Je dána n-prvková množina A kladných reálných čísel. Dokažte, že pro nejvýše $n-2$ různých celých čísel k lze zvolit navzájem různá $a, b, c \in A$, která splní $a + b + c = 3^k$.*

Řešení. Řekneme, že nějaké k *vyhovuje pro množinu* A, pokud existují po dvou různá $a, b, c \in A$ taková, že $a + b + c = 3^k$.

Postupujme matematickou indukcí:

(a) Nechť $n = 3$. Poté máme v množině A jen jednu trojici, tedy skutečně vyhovuje nejvýše jedno k.

(b) Nechť pro nějaké $n \geq 3$ platí, že pro každou n-prvkovou množinu M vyhovuje nejvýše $n-2$ různých celých k. Uvažme libovolnou množinu A s $n+1$ prvky $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$.

 (i) Nechť a_n není v žádné trojici prvků z A se součtem 3^ℓ pro celé ℓ. Víme, že množině $A \setminus \{a_n\}$ vyhovuje nejvýše $n-2$ různých k (indukční předpoklad), množině A ale vyhovují právě ta stejná k. Tedy v tomto případě jich vyhovuje dokonce méně než $(n+1)-2$.

 (ii) Nechť existují $x, y \in A$, $x < y < a_n$ taková, že $x + y + a_n = 3^\ell$ pro nějaké celé ℓ. Jistě platí $a_n > 3^{\ell-1}$ (jinak je součet příliš malý) a $a_n < 3^\ell$ (protože $x, y > 0$).

 Z toho ale plyne, že a_n není ve trojici se součtem $3^{\ell'}$ pro žádné celé $\ell' \neq \ell$. Pro $\ell' < \ell$ to plyne z $a_n > 3^{\ell-1} \geq 3^{\ell'}$ a pro $\ell' > \ell$ z

$$a_n + x' + y' \leq 3a_n < 3 \cdot 3^\ell \leq 3^{\ell'}$$

 pro každá $x', y' \in A$.

 Opět se podívejme na množinu $A \setminus \{a_n\}$. Jediné číslo k, které vyhovuje pro množinu A a (možná) nevyhovovalo pro množinu $A \setminus \{a_n\}$, je ℓ. Všech ostatních součtů 3^k pro celé k jsme dosáhli trojicí bez a_n, tedy trojicí z $A \setminus \{a_n\}$. Tedy přibylo nejvýše jedno k, a díky indukčnímu předpokladu jich tedy vyhovuje nejvýše $(n+1)-2$.

V každém případě tak tvrzení platí i pro $n+1$. Tím je důkaz dokončen.

Poznámky opravujícího. Většina řešení byla správně. Občas někdo řekl „vezměme největší vyhovující k" (nebo něco podobného), aniž by zdůvodnil, že nějaké k vyhovuje. Protože vynechaný případ byl triviální, body jsem za to nestrhával, ale dávejte si na takové věci pozor.

(Václav Janáček)

Úloha C1. *Nechť S je n^2-prvková množina bodů v rovině se souřadnicemi (x, y) pro $x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Alespoň $\frac{5}{2}n - 1$ bodů z S je obarveno červeně. Dokažte, že nějaké čtyři červené body leží na jedné kružnici.*

Řešení. Dokážeme, že medzi $\frac{5}{2}n - 1$ bodmi bude existovať rovnoramenný lichobežník súmerný BÚNV podľa zvislej osi.

Každá dvojica bodov s rovnakými x-ovými súradnicami definuje *os* tejto dvojice, ako priemer ich y-ových súradníc. Pokiaľ nájdeme dve takéto dvojice s rôznymi y-ovými súradnicami, no rovnakými osami, budeme mať nájdený rovnoramenný lichobežník.

Nech počet bodov s rovnakými x-ovými súradnicami v i-tom riadku (*riadok* má rovnaké x-ové súradnice) je a_i. Potom, ak si označíme tieto body postupne zľava doprava $1, 2, \ldots, I$, tak konštrukcia pre $2a_i - 3$ dvojíc bodov so vzájomne rôznymi osami z tohto riadku je napríklad: $(1, j)$, $(j+1, I)$ a $(1, j+1)$ pre $j \in \{1, 2, \ldots, a_i - 1\}$. (Taktiež budú fungovať aj dvojice $(j, j+1)$ a $(j, j+2)$ pre všetky „vhodné" j.)

Preto môžme spraviť odhad počtu (pre spor rôznych) osí ako

$$\sum_{i=1}^{n}(2a_i - 3) = 2\sum_{i=1}^{n} a_i - 3n \geq (5n-2) - 3n = 2n - 2.$$

Avšak počet všetkých možných osí v tabuľke je $2n-3$, pretože os je priemerom a počet rôznch hodnôt súčtov x-ových súradníc dvojíc bodov sú najviac všetky hodnoty od $1+2$ do $(n-1)+n$, čo je práve $2n-3$, teda nejaké dve dvojice bodov majú spoločnú os a tá už identifikuje hľadaný tetivovník.

Poznámky opravujícího. Počas hodnotenia som sa snažil čiastočne oceniť, ak ste si všimli, ktoré špecifické tietivovníky je možné v mriežke hľadať. Vám, ktorí ste za úlohu získali málo bodov, by som vytkol, že ste sa snažili zovšeobecniť konštrukcie, ktoré mali byť nejakými „krajnými prípadmi“, pre ktoré však existovali invarianty ako prehodenie riadkov, poprípade nepopísané zovšeobecnenia malých prípadov. A tak. *(Martin Andričík)*

Úloha N1. *Nechť $\mathbb{N}$ značí množinu kladných celých čísel. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které splňují $f(n) \mid f(m) + n - m$ pro libovolná $n, m \in \mathbb{N}$.*

Řešení. Ukážeme, že řešeními jsou právě funkce čtyř druhů: $f(x) = x + c$ pro nezáporná celá čísla c, konstantní funkce $f(x) = 1$ a dvojice funkcí

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \text{ liché,} \\ 2, & \text{je-li } x \text{ sudé,} \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 2, & \text{je-li } x \text{ liché,} \\ 1, & \text{je-li } x \text{ sudé.} \end{cases}$$

Dosazením snadno ověříme, že toto jsou řešení, zbývá tedy ukázat, že jiná řešení neexistují.

Zafixujme n a uvažujme dvě různá m_1, m_2. Potom zadaná dělitelnost dává

$$\begin{aligned} f(m_1) + n - m_1 \equiv f(m_2) + n - m_2 \equiv 0 \pmod{f(n)}, \\ f(m_1) - m_1 \equiv f(m_2) - m_2 \pmod{f(n)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Označme dále obor hodnot f jako S a rozlišme dva případy podle toho, kolik má prvků.

(i) Nechť je S nekonečná množina. Pak ukážeme, že $f(m) - m$ je konstantní. Pro spor nechť $f(m_1) - m_1 \neq f(m_2) - m_2$. Potom díky nekonečnosti (a tedy neomezenosti) S můžeme zvolit n tak, aby $f(n) > |(f(m_1) - m_1) - (f(m_2) - m_2)|$. Následně z (1) dostaneme, že rozdíl hodnot $f(m) - m$ pro m_1 a m_2 je nenulový násobek $f(n)$, takže

$$f(n) \leq |(f(m_1) - m_1) - (f(m_2) - m_2)| < f(n),$$

což je spor. Určitě tedy $f(m_1) - m_1 = f(m_2) - m_2$ pro každá dvě m_1, m_2, takže $f(m) - m$ je rovno jisté konstantě c. Potom už $f(x) = x + c$ a kvůli $f(1) \in \mathbb{N}$ musí být c nezáporné celé.

(ii) Nechť je S konečná množina. Označme r počet jejích prvků, k její maximální prvek a ℓ nejmenší společný násobek jejích prvků. Pak díky $k \mid \ell$ a tomu, že v S máme r různých přirozených čísel, určitě platí

$$\ell \geq k \geq r. \tag{2}$$

Rozdělme přirozená čísla na r skupin podle toho, jakou mají hodnotu f. Pokud m_1, m_2 leží ve stejné skupince, pak se (1) zjednoduší na $m_1 \equiv m_2 \pmod{f(n)}$. Když tedy dáme dohromady tyto kongruence pro všechna n, získáme $m_1 \equiv m_2 \pmod{\ell}$. To znamená, že každá skupinka podle hodnoty f, kterých je r, musí být celá obsažena jen v jedné zbytkové třídě mod ℓ, kterých je ℓ. Ale každé přirozené číslo musí být obsaženo v nějaké skupince, takže $r \geq \ell$. Dohromady s (2) tak máme

$$\ell = k = r,$$

a nutně tak $S = \{1, 2, \dots, r\}$. Z rovnosti $\ell = r$ navíc plyne, že každá skupinka podle hodnoty f musí obsahovat všechna čísla ze své zbytkové třídy mod ℓ.

Dále ukážeme $r \leq 2$. Kdyby $r \geq 3$, pak už je speciálně ℓ společným násobkem nesoudělných čísel r a $r-1$, takže

$$r = \ell \geq r(r-1) \geq r \cdot 2 > r,$$

což je spor.

Nyní pro $r = 1$ musíme dostat konstantní funkci $f(x) = 1$. Pro $r = 2$ musí f nabývat dvou různých hodnot – 1 a 2. Víme, že $f(x)$ musí jednoznačně odpovídat zbytkové třídě $x \pmod 2$, takže nutně dostaneme jednu ze dvou funkcí uvedených v úvodu.

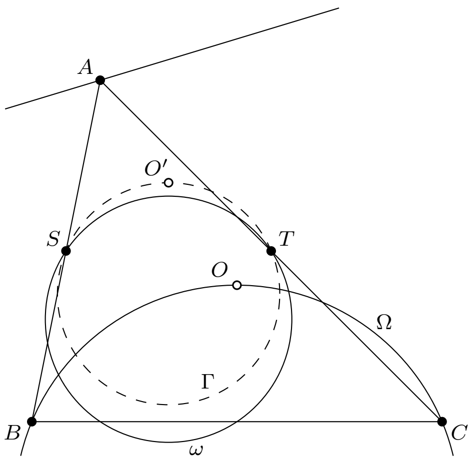
Poznámky opravujícího. Na rozdíl od vzorového řešení většina řešitelů z dosazení $n = x+1$, $m = x$ a dosazení $n = x$, $m = x+1$ nahlédla, že pro každé $x \in \mathbb{N}$ je buďto $f(x+1) = f(x)+1$, anebo $f(x+1) = 1$, z čehož se následně snažila dobrat k řešení nějakým více či méně přímočarým rozborem možností. Řešitelům, kteří se v některém z těchto případů dopustili chyby či nějaký případ opomenuli, jsem typicky strhl 1 nebo 2 body. Některá řešení také ztroskotala hned na začátku, když mylně usoudila, že $a \mid b$ vždy znamená $a \leq b$, což však platí pouze tehdy, když jsou a i b kladná, zatímco v této úloze mohla pravá strana dělitelnosti často být nulová nebo dokonce záporná. *(Matěj Doležálek)*

Úloha G1. *Mějme trojúhelník ABC se středem kružnice opsané O. Označme Ω kružnici opsanou BOC a ω Feuerbachovu kružnici[1] trojúhelníku ABC. Dokažte, že společné vnější tečny ω a Ω se protínají na vnější ose úhlu BAC.*

Řešení. Aby úloha platila, musí být trojúhelník ABC ostroúhlý (za chybu v zadání se omlouváme).

Společné vnější tečny dvou kružnic se protínají ve středu stejnolehlosti s kladným koeficientem, která na sebe tyto kružnice zobrazuje. Chceme dokázat, že tento střed stejnolehlosti zobrazující Ω na ω leží na vnější ose úhlu BAC.

Označme středy stran AB a AC postupně S a T. Střed kružnice opsané trojúhelníku AST označíme O'. Kružnici opsanou $SO'T$ označíme Γ.



[1] Nechť jsou A_0, B_0, C_0 středy stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Feuerbachovou kružnicí ABC rozumíme kružnici opsanou $A_0B_0C_0$.

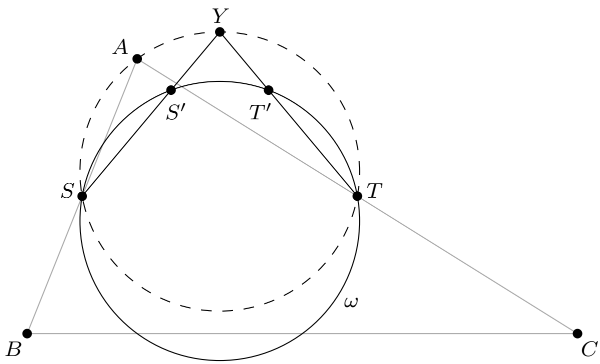
Složením stejnolehlosti zobrazující Ω na Γ a stejnolehlosti zobrazující Γ na ω získáme stejnolehlost zobrazující Ω na ω, tedy tu, o jejímž středu chceme dokázat, že leží na vnější ose úhlu BAC. Z Mongeovy věty víme, že bude ležet na přímce určené středy prvních dvou stejnolehlostí. Stačí nám proto dokázat, že tyto dva středy leží na vnější ose úhlu BAC.

Ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{1}{2}$ se zobrazí B na S, C na T, A na A. Proto se zobrazí i O na O'. Tím pádem se zobrazí Ω na Γ. Tudíž víme, že A je střed stejnolehlosti zobrazující Ω na Γ. Bod A určitě leží na vnější ose BAC, jak jsme chtěli.

Zbývá dokázat, že střed stejnolehlosti zobrazující Γ na ω, označme ho Y, leží na vnější ose úhlu BAC. Dokážeme, že je to A-antišvrk trojúhelníku AST (tj. průsečík osy ST, kružnice opsané AST a vnější osy úhlu SAT, což je vnější osa úhlu BAC).

Obrazy S a T ve zkoumané stejnolehlosti označíme postupně S' a T'. Chceme dokázat, že průsečík SS' a TT', označme ho Y, je antišvrk. Protože S a T jsou středy stran trojúhelníku ABC, leží na ω. Protože leží i na Γ a S' a T' jsou jejich obrazy ve stejnolehlosti zobrazující Γ na ω, leží i S' a T' na ω. Zároveň musí platit $ST \parallel S'T'$. Tudíž $STT'S'$ je rovnoramenný lichoběžník. Takže Y opravdu leží na ose ST.

Nyní vyúhlíme, že Y leží na kružnici opsané AST. Tím pádem už budeme vědět, že je to antišvrk a budeme hotovi. Budeme předpokládat, že $S'T'$ je ve stejné polorovině od ST jako A, opačný případ by se udělal analogicky.



Úhel BAC označíme α. Z věty o obvodovém a středovém úhlu víme, že $|\sphericalangle SO'T| = 2\alpha$. Tudíž obvodový úhel na ω nad obloukem $S'T'$ obsahujícím S a T je 2α. Protože příčkový trojúhelník je podobný trojúhelníku původnímu, ω je Feuerbachova kružnice ABC a ABC je ostroúhlý, je obvodový úhel na ω nad obloukem ST obsahujícím S' a T' roven α. Obvodový úhel celé kružnice je π, zároveň $STT'S'$ je rovnoramenný lichoběžník, takže úhel nad obloukem SS' neobsahujícím T a T' je

$$\frac{2\alpha + \alpha - \pi}{2} = \frac{3}{2}\alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Úhel nad obloukem $S'T'$ neobsahujícím S a T je $\pi - 2\alpha$. Tudíž platí

$$|\sphericalangle STY| = |\sphericalangle STT'| = \frac{3}{2}\alpha - \frac{\pi}{2} + \pi - 2\alpha = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

Obdobně $|\sphericalangle TSY| = \frac{\pi-\alpha}{2}$, takže $|\sphericalangle SYT| = \alpha = |\sphericalangle SAT|$. Tudíž Y opravdu leží na kružnici opsané AST, jak jsme chtěli, a důkaz je hotov. *(Magdaléna Mišinová)*