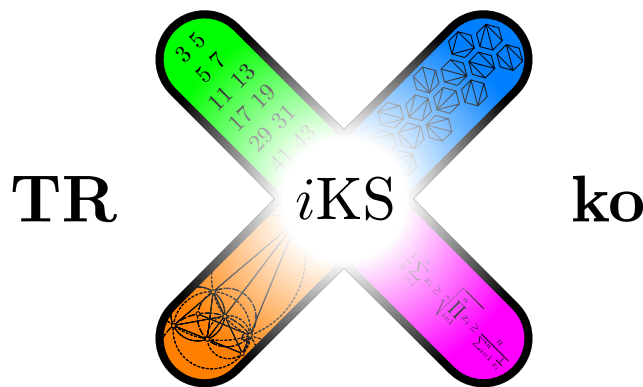




Úloha 1. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s päťami výšok D, E, F , ležiacimi postupne na stranách AB, BC, CA . Obraz bodu F v stredovej súmernosti podľa stredu strany AB leží na priamke DE . Určte veľkosť uhla BAC .

Řešení. Úloha 3: <https://skmo.sk/dokument.php?id=214>

□

Úloha 2. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla $a_1, \dots, a_n$ ($n \geq 2$)

$$(a_1^3 + 1)(a_2^3 + 1) \cdots (a_n^3 + 1) \geq (a_1^2 a_2 + 1)(a_2^2 a_3 + 1) \cdots (a_n^2 a_1 + 1)$$

Řešení. Z Höldera

$$\prod_{i=1}^n (a_i^3 + 1)^3 = \prod_{i=1}^n \left((a_i^3 + 1)^2 (a_{i+1}^3 + 1) \right) \geq \prod_{i=1}^n (a_i^2 a_{i+1} + 1)^3.$$

□

Úloha 3. Polynóm $P(x)$ stupňa $n \geq 5$ s celočíselnými koeficientmi má n rôznych celočíselných koreňov, z ktorých jeden je 0. Nájdite všetky celočíselné korene polynómu $P(P(x))$.

Řešení. Ľahko sa overí, že korene $P(x)$ sú korene aj $P(P(x))$. Tvrdíme, že žiadne ďalšie nie sú. Nech

$$P(x) = cx(x - a_1) \cdots (x - a_{n-1}).$$

Ďalej nech y je koreň $P(P(x))$ rôzny od a_i -čok. Potom $P(y) = a_i$ je koreň polynómu $P(x)$ a platí, že

$$P(y) = cy(y - a_1) \cdots (y - a_{n-1}) = a_i$$

teda $y \mid x_i$, čiže $ly = x_i = k(y - ly)$, kde $k = \frac{l}{1-l}$ je celé, čiže $l = 2$. Spätným dosadením a úpravou zistíme, že $2 = a(\frac{x_i}{2} - x_1) \cdots (\frac{x_i}{2} - x_n)$, teda že 2 je súčin 4 rôznych celých čísel, čo nie je možné.

□

Úloha 4. Nech $n \geq 16$ je celé číslo a majme množinu n^2 bodov v rovine:

$$G = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Nech A je podmnožina G aspoň $4n\sqrt{n}$ bodov. Dokážte, že existuje aspoň n^2 konvexných štvoruholníkov, ktorých vrcholy sú z A a všetky ich uhlopriečky prechádzajú jedným bodom.

Řešení. Úloha 6: <https://skmo.sk/dokument.php?id=78>

□