Riešenia 2. série

Úloha N2. *Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktoré pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}$ spĺňajú*

$$f(mn) = f(m)f(n)$$
$$m + n \mid f(m) + f(n).$$

Riešenie.

Zadaniu vyhovujú funkcie $f(n) = n^k$ pre všetky nepárne k. Ľahko overíme, že tieto funkcie zadanie spĺňajú ($a^k + b^k = (a+b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 - \cdots + b^{k-1})$. Dokážeme, že ostatné funkcie nevyhovujú.

Dosadením 1 do prvej rovnice dostávame $f(1) = 1$. Dosadením (n, n) do druhej podmienky dostávame $n \mid f(n)$. Predpokladajme, že pre nejaké prvočíslo p existuje prvočíslo q rôzne od p, ktoré delí $f(p)$. Dosaďme do druhej podmienky $(ap, 1)$, kde $ap \equiv -1 \pmod q$ (teda a je mínus inverz p modulo q). Dostaneme:

$$q \mid ap + 1 \mid f(a)f(q) + 1$$

Keďže $q \mid f(q)$, tak aj $q \mid 1$, čo je spor. Preto pre všetky prvočísla p neexistuje žiaden iný prvočíselný deliteľ $f(p)$ okrem p. Teda $f(p) = p^k$. Pozor, toto k môže byť rôzne pre rôzne p. Dosaďme do druhej podmienky $(p, 1)$. Dostaneme $p^k \equiv -1 \pmod{p+1}$, teda $(-1)^k \equiv -1 \pmod{p+1}$, a preto k musí byť nepárne pre všetky p ($p + 1 > 2$).

Zafixujme si p a nech $f(p) = p^k$. Dosaďme do druhej podmienky (p^N, m). Dostávame:

$$p^N + m \mid p^{kN} + f(m)$$

Vieme však, že platí aj $p^N + m \mid p^{kN} + m^k$. Po odčítaní teda dostávame:

$$p^N + m \mid f(m) - m^k$$

Pre fixné m, ak zvolíme dostatočne veľké N, ľavá strana bude väčšia ako pravá, teda musí platiť $f(m) - m^k = 0$. Preto musí platiť $f(m) = m^k$. Teda existuje nepárne k také, že $f(n) = n^k$ pre všetky n.

(Jakub„Šošo“Šošovička)

Úloha A2. *Pre všetky kladné celé čísla $n \geq 3$ nájdite najväčšie reálne číslo C_n, také že pre ľubovoľné po 2 rôzne kladné reálne čísla a_1, $a_2 \ldots$, a_{2n} platí*

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \cdots + \frac{a_{2n}}{|a_1 - a_2|} > C_n.$$

Riešenie. Ukážeme, že $C_n = n$. Najprv dokážeme, že $C_n \leq n$. Voľme

$$(a_1, a_2, \ldots a_{2n}) = (k, 1 + k, 2k, 1 + 2k \ldots kn, 1 + kn)$$

kde k je kladné reálne číslo menšie ako 1. Po dosadení dostávame, že náš skúmaný výraz sa rovná $\frac{n(n+1)k}{2(1-k)} + n + n(n+1)k > n$. Voľbou k blížiaceho sa k nule vidíme, že $C_n \leq n$. Na dolný odhad C_n musíme ukázať, že zadaný výraz je vždy väčší ako n. Na to využijeme odhad $\frac{a_i}{|a_{i+1} - a_{i+2}|} > \frac{a_i}{\max(a_{i+1}, a_{i+2})}$. Každá absolútna hodnota je nahradená nejakým a_i, takže uvažujme orientovaný graf, kde vrcholy sú naše odhadnuté zlomky. Pričom z každého vrcholu $\frac{a_i}{a_j}$ vedie do $\frac{a_j}{a_k}$ (hrana vedie tam, kde je menovateľ prvého zlomku čitateľ) . Máme $2n$ vrcholov a $2n$ hrán, to znamená, že existuje cyklus. Tiež si môžeme všimnúť, že každá hrana zväčší index čitateľa buď o 1 alebo o 2 modulo $2n$, takže cyklus má dĺžku aspoň n. Teda máme aspoň n zlomkov kde sa množina čitateľov rovná množine menovateľov, čo vyplýva z konštrukcie hrán a toho, že máme cyklus. Jednoduchým použitím AG-čka na tento cyklus dostávame dokazované tvrdenie.

Poznámky opravovateľa. Všetky 7-bodové riešenia postupovali ako vzorák.

(Adam „Džavo“ Džavoronok)

Úloha C2. *V rovine je daných 2024 fialových a 2024 purpurových bodov, že žiadne 3 neležia na jednej priamke. Dvojicu kladných celých čísel (a, b) nazveme dobrou, ak existuje polrovina obsahujúca a fialových a b purpurových bodov. Koľko najmenej dobrých dvojíc môže daná množina bodov mať? Body, ktoré ležia na hranici polroviny, jej nepatria.*

Riešenie. Najprv ukážeme, že existuje najmenej $2024 \cdot 3 + 1 = 6073$ dobrých dvojíc. Najprv si situáciu otočme tak, aby existoval „najspodnejší bod“. Bez ujmy na všeobecnosti, nech je fialový. Uvažujme vodorovnú priamku idúcu cez tento bod a na polrovinu smerujúcu nadol. Tá nám dáva prvú dvojicu $(0, 0)$. Okolo tohto bodu otáčajme túto priamku v smere hodinových ručičiek. Postupne po jednom táto priamka zametie všetky body okrem toho, okolo ktorého sa otáča. V každom kroku tohto zametania nájde novú dobrú dvojicu, lebo súčet čísel v polrovine sa zvýši o 1 (a teda bude iný). Tým získame ďalších 4047 dobrých dvojíc.
Teraz tento postup zopakujme, ale najprv posuňme úvodnú polrovinu o trochu vyššie a počas otáčania sa uistime, že ten „spodný bod“ vždy patrí tejto polrovine. Keď túto polrovinu začneme otáčať, tak vždy, keď „zametieme“ purpurový bod, tak nájdeme novú dobrú dvojicu, lebo keď sme zamietli tento bod v minulom prechode, tak sme mali o jeden menej fialových bodov. Týmto získame nových 2024 dobrých dvojíc. Posledná dobrá dvojica sa našla v priebehu tohto cyklu tesne pred tým, ako sme nabrali prvý purpurový bod. Je to preto, že toľko veľa fialových bodov bez purpurového sme ešte nemali. Tým pádom v každej konfigurácii je aspoň $2024 \cdot 3 + 1 = 6073$ dobrých dvojíc.
Teraz nám už len stačí nájsť konfiguráciu, kde je presne 6073 dobrých dvojíc. Jeden z príkladov takejto konfigurácie je pravidelný 4048-uholník, ktorého vrcholy sú striedavo fialové a purpurové. Keď si vezmeme ľubovoľnú polrovinu, tak je v nej maximálne o jeden viac jednej farby, ako druhej. Ľahko si vieme domyslieť, že všetky tieto konfigurácie sa dajú dosiahnuť. Týchto dobrých dvojíc tu bude presne $1 + 3 \cdot 2024 = 6073$, pretože pre každé číslo od 1 do 2024 existujú 3 dobré dvojice, kte to číslo je vyšším z dvoch čísel a okrem nich existuje už len dvojica $(0, 0)$.

(Martin Kopčány)

Úloha G2. *Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník. Nech priamky DA a BC sa pretínajú v bode E a nech priamky AB a CD sa pretínajú v bode F. Predpokladajme, že A, E, F ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou BD. Nech P leží na úsečke DA tak, že $|\measuredangle CPD| = |\measuredangle CBP|$, a nech Q leží na úsečke CD tak, že $|\measuredangle DQA| = |\measuredangle QBA|$. Nech AC a PQ sa pretínajú v bode X. Dokážte, že ak $|EX| = |EP|$, tak potom priamka EF je kolmá na AC.*

Riešenie. Nech R, S sú obrazmi P, Q podľa stredovej súmernosti postupne podľa E, F. Tvrdíme, že X leží na RS. Uhlová podmienka $\angle CPD = \angle CBP$ je ekvivalentná, že priamka AD je dotyčnicou k (PBC) teda:

$$ER^2 = EP^2 = EB \cdot EC = EA \cdot ED$$

To znamená, že A, D sa zobrazia na seba kružnicovou inverziu podľa kružnice s priemerom PR, z čoho vyplýva $(P, R; D, A) = -1$. Podobne $(Q, S; D, C) = -1$. Pri premietnutí cez X (ktoré leží na AC, PQ) dostaneme:

$$-1 = (P, R; D, A) \stackrel{X}{=} (Q, RX \cap CD; D, C) = (Q, S; D, C)$$

takže $RX \cap CD \equiv S$ čo ukazuje, že X leží na RS.

Nech ω_1, ω_2 označujú kružnice s priemermi PR,QS Z podmienky $EX = EP$ vyplýva, že X leží na ω_1, čiže X leží na RS:

$$\angle QXS = \angle PXS = 180^\circ - \angle RXP = 90^\circ$$

čo znamená, že X leží aj na ω_2.

Nech M je priesečník priamok BD a AC a kružnicu $(ABCD)$ označme Γ. Z $EP^2 = EA \cdot ED$ dostaneme:

$$EP^2 = (ED - AD) \cdot ED$$
$$DA \cdot DE = ED^2 - EP^2 = (ED + DP)\,(ED - EP) = DP \cdot DR$$

Preto D leží na chordále ω_1 a (EAC). Analogickým argumentom dostaneme, že B tiež leží na ich chordále. Teda BD je chordálou z čoho vidíme, že potenčný stred $\omega_1, \Gamma, (EAC)$ je M. Ak zopakujeme argumentáciu s ω_2, vidíme, že M je aj potenčným stredom $\omega_1, \omega_2, \Gamma$ a leží na chordále ω_1, ω_2. Na nej leží aj X, takže chordála ω_1, ω_2 je priamka MX, teda priamka AC.

Napokon priamka spájajúca stredy kružníc ω_1, ω_2 je EF, ktorá je kolmá na chordálu AC, čím sme hotoví . *(Roland Vízner)*